

DCC638 - Introdução à Lógica Computacional
2026.2

Demonstrações

Área de Teoria DCC/UFMG

Introdução

- Em diversas situações é preciso deduzir **conclusões** a partir de **premissas**:
 - ➊ em matemática: estabelecer verdades absolutas (teoremas),
 - ➋ em ciência da computação: verificar que propriedades de um sistema são válidas, dada sua especificação,
 - ➌ em política/filosofia: demonstrar que certas ideias são bem fundamentadas.
- O processo de derivar conclusões de premissas é uma *argumentação*.
- Uma **demonstração** é uma argumentação, formal, de que a verdade de uma afirmação segue a partir da verdade de um conjunto de premissas.

Demonstrações em lógica proposicional

- Uma **demonstração** é uma sequência de proposições.
- As proposições iniciais são chamadas de **premissas**.
- A proposição final é chamada de **conclusão**.
- Cada proposição além das premissas deve ser derivada por um **argumento válido**.
- Uma **demonstração válida** é aquela em que a verdade de suas premissas implica, através de argumentos válidos, na verdade de sua conclusão.
 - Em outras palavras: toda valoração que torna as premissas verdadeiras deve também tornar a conclusão verdadeira.

Argumentos válidos em lógica proposicional

- Exemplo 1 Considere o seguinte argumento envolvendo proposições:
 1. *"Se você está matriculado em Introdução à Lógica Computacional, você tem acesso à página da disciplina."*
 2. *"Você está matriculado em Introdução à Lógica Computacional."*Logo,
 3. *"Você tem acesso à página da disciplina."*

Essa é uma argumentação válida?

Ou seja, é verdade que a conclusão (3) é verdadeira sempre que as premissas (1) e (2) forem ambas verdadeiras?

Argumentos válidos em lógica proposicional

- Exemplo 1 (Continuação)

Solução. Vamos analisar a estrutura do argumento.

Sejam as proposições:

- p : “Você está matriculado em *Introdução à Lógica Computacional*”, e
- q : “Você tem acesso à página da disciplina”.

O argumento anterior pode ser visualizado como

$$\frac{p \quad p \rightarrow q}{q}$$

representando que

- se as premissas p e $p \rightarrow q$ são verdadeiras
- então a conclusão q é verdadeira

Argumentos válidos em lógica proposicional

- Exemplo 1 (Continuação)

Considerando p e q como variáveis proposicionais, podemos usar uma tabela da verdade para verificar que sempre que as premissas são verdadeiras, a conclusão também é.

		Premissas		Conclusão
p	q	$p \rightarrow q$	p	q
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	F	T	F	F

Assim, o argumento

$$\frac{p \quad p \rightarrow q}{q}$$

é válido.

- Note que $(p \wedge p \rightarrow q) \rightarrow q$ é uma tautologia!



Argumentos válidos em lógica proposicional

- Um argumento válido pode ser interpretado como uma regra de preservação da verdade:
 1. De premissas verdadeiras um argumento válido garante uma conclusão verdadeira.
 2. Por outro lado de premissas falsas qualquer conclusão é possível.

Argumentos válidos em lógica proposicional

- Um **argumento inválido** é aquele em que a verdade das premissas não garante a verdade da conclusão.
- Exemplo 2 Mostre que o argumento a seguir é inválido.

$$\frac{p \rightarrow q \quad q}{p}$$

Argumentos válidos em lógica proposicional

- Um **argumento inválido** é aquele em que a verdade das premissas não garante a verdade da conclusão.
- Exemplo 2

 Mostre que o argumento a seguir é inválido.

$$\frac{p \rightarrow q \quad q}{p}$$

Solução.

A terceira linha da tabela da verdade mostra que as premissas $p \rightarrow q$ e q podem ser ambas verdadeiros, e mesmo assim a conclusão p ser falsa. Assim, o formato de argumento é inválido.

		Premissas		Conclusão
p	q	$p \rightarrow q$	q	p
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	F	F

Argumentos válidos em lógica proposicional

- Um **argumento inválido** é aquele em que a verdade das premissas não garante a verdade da conclusão.
- Exemplo 2

 Mostre que o argumento a seguir é inválido.

$$\frac{p \rightarrow q \quad q}{p}$$

Solução.

A terceira linha da tabela da verdade mostra que as premissas $p \rightarrow q$ e q podem ser ambas verdadeiros, e mesmo assim a conclusão p ser falsa. Assim, o formato de argumento é inválido.

		Premissas		Conclusão
p	q	$p \rightarrow q$	q	p
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	F	F

- Note que $(p \rightarrow q \wedge q) \rightarrow p$ **não** é uma tautologia!

Argumentos válidos em lógica proposicional

- Exemplo 2 (Continuação)

Como um exemplo de como este formato de argumento é inválido, note que das premissas

- “Se Bill Gates ganhar na loteria, ele fica rico” e
- “Bill Gates é rico”

não se pode concluir que necessariamente

- “Bill Gates ganhou na loteria”.

•

Validade vs. verdade

- A validade é uma propriedade do argumento.
- A verdade é uma propriedade das premissas e conclusões do argumento.

- Exemplo 3

Considere o argumento

“Se a França é um país rico, então sua língua oficial é o inglês.”
“A França é um país rico.”
∴ *“A língua oficial da França é o inglês.”*

Este argumento é um argumento válido.

Note, entretanto, que sua primeira premissa é falsa¹, assim como sua conclusão é falsa.

¹Na valoração que usaríamos para estas proposições que corresponde à nossa realidade.

Argumentos válidos em lógica proposicional: validade vs. verdade

- Exemplo 3 (Continuação)

Considere o argumento:

“Se Londres é uma metrópole, então ela tem prédios altos.”
“Londres tem prédios altos.”
∴ *“Londres é uma metrópole.”*

Este argumento é um argumento inválido.

Note, entretanto, que sua conclusão é verdadeira².

(Porém a veracidade da conclusão é incidental: ela não segue necessariamente da verdade das premissas.)

²Na valoração que usaríamos para estas proposições que corresponde à nossa realidade.

Argumentos válidos em lógica proposicional: validade vs. verdade

- Em resumo, a conclusão de um argumento é garantidamente verdadeira se:
 1. o argumento for válido, e
 2. todas as suas premissas forem verdadeiras.

Caso contrário, a verdade da conclusão não é garantida.

Regras de inferência

- Argumentos válidos correspondem a tautologias.
 - Argumentos válidos *elementares* são chamados de **regras de inferência**.
- Demonstrações complexas podem ser difíceis de verificar.
 - Por exemplo, a tabela de verdade de uma demonstração envolvendo 10 variáveis tem $2^{10} = 1\,024$ linhas.
- Construimos demonstrações através de passos mais simples, usando regras de inferência.

Regras de inferência

- Argumentos válidos correspondem a tautologias.
 - Argumentos válidos *elementares* são chamados de **regras de inferência**.
- Demonstrações complexas podem ser difíceis de verificar.
 - Por exemplo, a tabela de verdade de uma demonstração envolvendo 10 variáveis tem $2^{10} = 1\,024$ linhas.
- Construimos demonstrações através de passos mais simples, usando regras de inferência.
- Mas quais regras de inferência?
 - Há infinitas tautologias, logo infinitos argumentos válidos.
 - Queremos um conjunto *pequeno* e *fixo* de regras, com uma justificativa clara para cada uma, e a partir do qual *todas* as demais possam ser obtidas.
 - Um tal conjunto de regras é um **sistema dedutivo**.

Regras de inferência

Dedução natural

- Sistema dedutivo introduzido nos anos 30 por G. Gentzen e por S. Jaśkowski, com o objetivo de refletir o modo como raciocinamos “naturalmente”.
- Princípio organizador: as regras seguem os conectivos. Para cada conectivo há
 - uma regra de **eliminação**: como *usar* uma fórmula que tem o conectivo como operador principal, e
 - uma regra de **introdução**: como *concluir* uma fórmula que tem o conectivo como operador principal.
- O significado de cada conectivo é dado pelas suas regras; nenhuma regra fala de mais de um conectivo.

Dedução natural

- Sistema dedutivo introduzido nos anos 30 por G. Gentzen e por S. Jaśkowski, com o objetivo de refletir o modo como raciocinamos “naturalmente”.
- Princípio organizador: as regras seguem os conectivos. Para cada conectivo há
 - uma regra de **eliminação**: como *usar* uma fórmula que tem o conectivo como operador principal, e
 - uma regra de **introdução**: como *concluir* uma fórmula que tem o conectivo como operador principal.
- O significado de cada conectivo é dado pelas suas regras; nenhuma regra fala de mais de um conectivo.
- Nesta aula veremos primeiro as regras de **eliminação**, que bastam para tirar conclusões a partir de premissas em muitos argumentos.
 - Em seguida veremos as regras com hipóteses temporárias necessárias para os demais exemplos, e mais adiante o sistema completo.

Árvores de derivação

- Vamos estudar regras de inferência no contexto de *dedução natural*
- Demonstrações são representadas como **árvores de derivação**:

$$\frac{\frac{p \quad p \rightarrow q}{q} \rightarrow_E \quad q \rightarrow (r \wedge s)}{\frac{r \wedge s}{r} \wedge_{E_d}} \rightarrow_E$$

- As **folhas** são as **hipóteses** (aqui, as premissas p , $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow (r \wedge s)$).
- A **raiz** é a **conclusão** (aqui, r).
- Cada barra é a aplicação de uma regra de inferência, indicada à sua direita: acima da barra as premissas, e abaixo a conclusão.
- Regra $\rightarrow_E$ (eliminação da implicação):

$$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi} \rightarrow_E$$

- Regra $\wedge_{E_d}$ (eliminação da conjunção à direita)

$$\frac{\varphi_1 \wedge \varphi_2}{\varphi_1} \wedge_{E_d}$$

Eliminação da implicação

- Exemplo 4 Suponha que saibamos que

1. *“Se fizer sol hoje, eu vou ao clube”*,
e que
2. *“Está fazendo sol hoje”*,
então, por $\rightarrow_E$, podemos concluir que
3. *“Eu vou ao clube.”*

Eliminação da implicação

- Exemplo 4 Suponha que saibamos que

1. “Se fizer sol hoje, eu vou ao clube”,
e que
2. “Está fazendo sol hoje”,
então, por $\rightarrow_E$, podemos concluir que
3. “Eu vou ao clube.”

Sendo p a proposição “Está fazendo sol hoje” e q a proposição “Eu vou ao clube”, a derivação é

$$\frac{p \quad p \rightarrow q}{q} \rightarrow_E$$



Eliminação da implicação e da conjunção

- Exemplo 5 Justifique a argumentação abaixo:

“Se está chovendo, eu fico em casa.

Se eu fico em casa, eu estudo e durmo cedo.

Está chovendo.

Logo, eu estudo.”

Eliminação da implicação e da conjunção

- Exemplo 5 Justifique a argumentação abaixo:

“Se está chovendo, eu fico em casa.

Se eu fico em casa, eu estudo e durmo cedo.

Está chovendo.

Logo, eu estudo.”

Solução. Sejam p : “Está chovendo”, q : “Eu fico em casa”, r : “Eu estudo”, e s : “Eu durmo cedo”.

As premissas são p , $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow (r \wedge s)$, e a conclusão r é derivada exatamente pela árvore que vimos antes:

$$\frac{\frac{p \quad p \rightarrow q}{q} \rightarrow E \quad q \rightarrow (r \wedge s)}{\frac{r \wedge s}{r} \wedge E_d} \rightarrow E$$



Regras de eliminação

Regras de eliminação: implicação e conjunção

- Regra $\rightarrow_E$ (eliminação da implicação):

$$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi} \rightarrow_E$$

- Se o condicional $\varphi \rightarrow \psi$ e sua hipótese φ são verdadeiros, então sua conclusão ψ é necessariamente verdadeira.
- Conhecida desde a antiguidade como **modus ponens** (do latim para “*modo de afirmação*”).

- Regras $\wedge_{E_d}$ e $\wedge_{E_e}$ (eliminação da conjunção à direita e à esquerda):

$$\frac{\varphi_1 \wedge \varphi_2}{\varphi_1} \wedge_{E_d}$$

$$\frac{\varphi_1 \wedge \varphi_2}{\varphi_2} \wedge_{E_e}$$

- Se $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ é verdadeira, então cada um dos dois conjuntos é verdadeiro.
- O nome indica qual lado é eliminado: $\wedge_{E_d}$ descarta o conjunto da direita e fica com φ_1 ; $\wedge_{E_e}$ descarta o da esquerda e fica com φ_2 .
- Tradicionalmente chamadas de **simplificação conjuntiva**.

Eliminação da conjunção

- Exemplo 6 Justifique a argumentação abaixo:

“Está frio e está chovendo.

Se está chovendo, o jogo é cancelado.

Logo, o jogo é cancelado.”

Eliminação da conjunção

- Exemplo 6 Justifique a argumentação abaixo:

“Está frio e está chovendo.

Se está chovendo, o jogo é cancelado.

Logo, o jogo é cancelado.”

Solução. Sejam

- p a proposição “Está frio”,
- q a proposição “Está chovendo”, e
- r a proposição “O jogo é cancelado”.

As premissas são $p \wedge q$ e $q \rightarrow r$, e a conclusão r é derivada por

$$\frac{\frac{p \wedge q}{q} \wedge E_e \quad q \rightarrow r}{r} \rightarrow_E$$



Eliminação da negação, introdução de disjunção e conjunção

- Regra $\neg_E$ (eliminação da negação):

$$\frac{\varphi \quad \neg\varphi}{\perp} \neg_E$$

- Se derivamos tanto φ quanto $\neg\varphi$, chegamos a uma **contradição**, representada pela constante $\perp$.
- Regras $\vee_{I_d}$ e $\vee_{I_e}$ (introdução da disjunção à direita e à esquerda):

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_1 \vee \varphi_2} \vee_{I_d}$$

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1 \vee \varphi_2} \vee_{I_e}$$

- Se um dos disjuntos é verdadeiro, então $\varphi_1 \vee \varphi_2$ é verdadeira: $\vee_{I_d}$ acrescenta o disjunto da direita a φ_1 , e $\vee_{I_e}$ acrescenta o da esquerda a φ_2 .
- Tradicionalmente chamadas de **adição disjuntiva**.
- Regra $\wedge_I$ (introdução da conjunção):

$$\frac{\varphi_1 \quad \varphi_2}{\varphi_1 \wedge \varphi_2} \wedge_I$$

- Para concluir $\varphi_1 \wedge \varphi_2$: derive φ_1 e derive φ_2 . Tradicionalmente chamada de **adição conjuntiva**.

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- É possível que precisemos aplicar várias regras de inferência para demonstrar uma conclusão a partir de premissas.

- Exemplo 7

 Mostre que as premissas

- Ⓐ *"Não está chovendo, e o ônibus está atrasado."*
 - Ⓑ *"Se o ônibus está atrasado, eu vou a pé."*
 - Ⓒ *"Se eu vou a pé, chego cansado e com fome."*
 - Ⓓ *"Se chego com fome, almoço no restaurante universitário."*

levam à conclusão:

"Eu almoço no restaurante universitário ou na cantina."

Usando regras de inferência para construir demonstrações

Exemplo 7 (Continuação)

Solução. Para formalizar os fatos que você sabe, vamos usar as proposições:

- p : “Está chovendo.”
- q : “O ônibus está atrasado.”
- r : “Eu vou a pé.”
- s : “Eu chego cansado.”
- t : “Eu chego com fome.”
- u : “Eu almoço no restaurante universitário.”
- v : “Eu almoço na cantina.”

Assim, as premissas são:

$$(a) \quad \neg p \wedge q$$

$$(b) \quad q \rightarrow r$$

$$(c) \quad r \rightarrow (s \wedge t)$$

$$(d) \quad t \rightarrow u$$

E a conclusão é $u \vee v$.

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 7 (Continuação)

Podemos construir uma derivação da conclusão a partir das premissas usando apenas $\rightarrow_E$, as regras de eliminação da conjunção e a introdução da disjunção:

$$\frac{\mathcal{D}}{u \vee v}$$

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 7 (Continuação)

Podemos construir uma derivação da conclusão a partir das premissas usando apenas $\rightarrow_E$, as regras de eliminação da conjunção e a introdução da disjunção:

$$\frac{\mathcal{D} \quad u}{u \vee v} \vee_{I_d}$$

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 7 (Continuação)

Podemos construir uma derivação da conclusão a partir das premissas usando apenas $\rightarrow_E$, as regras de eliminação da conjunção e a introdução da disjunção:

$$\frac{\mathcal{D} \quad \frac{t \quad t \rightarrow u}{u} \rightarrow_E}{u \vee v} \vee I_d$$

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 7 (Continuação)

Podemos construir uma derivação da conclusão a partir das premissas usando apenas $\rightarrow_E$, as regras de eliminação da conjunção e a introdução da disjunção:

$$\frac{\mathcal{D} \quad \frac{s \wedge t}{t} \wedge E_e \quad t \rightarrow u}{\frac{u}{u \vee v} \vee I_d} \rightarrow_E$$

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 7 (Continuação)

Podemos construir uma derivação da conclusão a partir das premissas usando apenas $\rightarrow_E$, as regras de eliminação da conjunção e a introdução da disjunção:

$$\frac{\mathcal{D} \quad \frac{r \quad r \rightarrow (s \wedge t)}{s \wedge t} \rightarrow_E}{\frac{\frac{s \wedge t}{t} \wedge_{E_e} \quad t \rightarrow u}{u} \rightarrow_E} \vee_{I_d} \frac{u}{u \vee v}$$

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 7 (Continuação)

Podemos construir uma derivação da conclusão a partir das premissas usando apenas $\rightarrow_E$, as regras de eliminação da conjunção e a introdução da disjunção:

$$\begin{array}{c} \mathcal{D} \\ \hline \frac{q \quad q \rightarrow r}{r} \rightarrow_E \quad \frac{r \rightarrow (s \wedge t)}{s \wedge t} \rightarrow_E \\ \hline \frac{s \wedge t}{t} \wedge E_e \quad \frac{t \rightarrow u}{u} \rightarrow_E \\ \hline \frac{u}{u \vee v} \vee I_d \end{array}$$

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 7 (Continuação)

Podemos construir uma derivação da conclusão a partir das premissas usando apenas $\rightarrow_E$, as regras de eliminação da conjunção e a introdução da disjunção:

$$\frac{\frac{\frac{\neg p \wedge q}{q} \wedge E_e \quad q \rightarrow r}{r} \rightarrow_E \quad r \rightarrow (s \wedge t)}{\frac{s \wedge t}{t} \wedge E_e} \rightarrow_E \quad \frac{t \rightarrow u}{\frac{u}{u \vee v} \vee I_d} \rightarrow_E$$

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 7 (Continuação)

Podemos construir uma derivação da conclusão a partir das premissas usando apenas $\rightarrow_E$, as regras de eliminação da conjunção e a introdução da disjunção:

$$\frac{\frac{\frac{\neg p \wedge q}{q} \wedge_{E_e} \quad q \rightarrow r}{r} \rightarrow_E \quad r \rightarrow (s \wedge t)}{\frac{s \wedge t}{t} \wedge_{E_e} \quad t \rightarrow u} \rightarrow_E \quad \frac{u}{u \vee v} \vee_{I_d}$$

- Lendo a árvore de baixo para cima: para concluir $u \vee v$ basta concluir um dos disjuntos, e escolhemos u ; para concluir u precisamos de t ; para concluir t precisamos de $s \wedge t$, e portanto de r ; e para concluir r precisamos de q , que obtemos da premissa (a).

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 7 (Continuação)

Podemos construir uma derivação da conclusão a partir das premissas usando apenas $\rightarrow_E$, as regras de eliminação da conjunção e a introdução da disjunção:

$$\frac{\frac{\frac{\neg p \wedge q}{q} \wedge E_e \quad q \rightarrow r}{r} \rightarrow_E \quad r \rightarrow (s \wedge t)}{\frac{s \wedge t}{t} \wedge E_e} \rightarrow_E \quad \frac{t \rightarrow u}{\frac{u}{u \vee v} \vee I_d} \rightarrow_E$$

- Lendo a árvore de baixo para cima: para concluir $u \vee v$ basta concluir um dos disjuntos, e escolhemos u ; para concluir u precisamos de t ; para concluir t precisamos de $s \wedge t$, e portanto de r ; e para concluir r precisamos de q , que obtemos da premissa (a).
- Note que a primeira parte da premissa (a), $\neg p$, não foi necessária para a conclusão.

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 7 (Continuação)

Suponha agora que soubéssemos, além de (a)–(d), que

ⓔ “Eu não almoço no restaurante universitário, nem na cantina.” $(\neg u \wedge \neg v)$

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 7 (Continuação)

Suponha agora que soubéssemos, além de (a)–(d), que

ⓔ “Eu não almoço no restaurante universitário, nem na cantina.” ($\neg u \wedge \neg v$)

- Chamando de $\mathcal{D}$ a derivação anterior, que conclui $u \vee v$, raciocinamos por casos: supondo u , obtemos $\neg u$ de (e) e uma **contradição** por $\neg E$; supondo v , repetimos o padrão com $\neg v$:

$$\frac{\mathcal{D} \quad \frac{[u]^1 \quad \frac{\neg u \wedge \neg v}{\neg u} \wedge E_d}{\perp} \neg E \quad \frac{[v]^2 \quad \frac{\neg u \wedge \neg v}{\neg v} \wedge E_e}{\perp} \neg E}{u \vee v \quad \perp \quad \vee E, 1, 2} \perp$$

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 7 (Continuação)

Suponha agora que soubéssemos, além de (a)–(d), que

ⓔ “Eu não almoço no restaurante universitário, nem na cantina.” ($\neg u \wedge \neg v$)

- Chamando de $\mathcal{D}$ a derivação anterior, que conclui $u \vee v$, raciocinamos por casos: supondo u , obtemos $\neg u$ de (e) e uma **contradição** por $\neg E$; supondo v , repetimos o padrão com $\neg v$:

$$\frac{\mathcal{D} \quad \frac{[u]^1 \quad \frac{\neg u \wedge \neg v}{\neg u} \wedge E_d}{\perp} \neg E}{u \vee v} \quad \frac{[v]^2 \quad \frac{\neg u \wedge \neg v}{\neg v} \wedge E_e}{\perp} \neg E}{\perp} \vee E_{1,2}$$

- Em qualquer dos casos chegamos a $\perp$: as premissas (a)–(e) são contraditórias, e não podem ser todas verdadeiras.
 - Os casos u e v são **hipóteses temporárias**, fechadas ao final pela regra $\vee E$: é o que veremos a seguir.



Hipóteses temporárias

- Frequentemente raciocinamos “supondo” algo temporariamente:

“Suponha que φ . Então ... Logo ψ .”

A conclusão ψ vale sob a hipótese φ .

Hipóteses temporárias

- Frequentemente raciocinamos “supondo” algo temporariamente:

“Suponha que φ . Então ... Logo ψ .”

A conclusão ψ vale sob a hipótese φ .

- Algumas regras usam este tipo de raciocínio: elas introduzem uma hipótese temporária, usam-na em uma subderivação, e ao final a **fecham**.
 - Uma hipótese fechada é escrita entre colchetes e recebe uma **etiqueta**: $[\varphi]^n$.
 - A regra que a fecha leva a mesma etiqueta n , para indicar quais hipóteses ela fecha.
 - Após ser fechada, a hipótese não é mais uma hipótese da derivação: a conclusão final não depende dela.

Hipóteses temporárias

- Frequentemente raciocinamos “supondo” algo temporariamente:

“Suponha que φ . Então ... Logo ψ .”

A conclusão ψ vale sob a hipótese φ .

- Algumas regras usam este tipo de raciocínio: elas introduzem uma hipótese temporária, usam-na em uma subderivação, e ao final a **fecham**.
 - Uma hipótese fechada é escrita entre colchetes e recebe uma **etiqueta**: $[\varphi]^n$.
 - A regra que a fecha leva a mesma etiqueta n , para indicar quais hipóteses ela fecha.
 - Após ser fechada, a hipótese não é mais uma hipótese da derivação: a conclusão final não depende dela.
- As premissas de um argumento são hipóteses que permanecem abertas: a conclusão depende delas.

Eliminação da disjunção

- Regra $\vee_{E,n_1,n_2}$ (eliminação da disjunção):

$$\frac{\begin{array}{ccc} & [\varphi_1]^{n_1} & [\varphi_2]^{n_2} \\ \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 & \mathcal{D}_3 \\ \varphi_1 \vee \varphi_2 & \psi & \psi \end{array}}{\psi} \vee_{E,n_1,n_2}$$

- Esta regra formaliza o **raciocínio por casos**: se $\varphi_1 \vee \varphi_2$ é verdadeira, então φ_1 é verdadeira ou φ_2 é verdadeira, mas não sabemos qual.
 - Se tanto supondo φ_1 (derivação $\mathcal{D}_2$) quanto supondo φ_2 (derivação $\mathcal{D}_3$) conseguimos concluir ψ , então ψ vale de qualquer forma.
 - As hipóteses φ_1 e φ_2 são fechadas: ψ não depende de nenhuma delas.

Eliminação da disjunção

- Regra $\vee_{E,n_1,n_2}$ (eliminação da disjunção):

$$\frac{\begin{array}{ccc} & [\varphi_1]^{n_1} & [\varphi_2]^{n_2} \\ \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 & \mathcal{D}_3 \\ \varphi_1 \vee \varphi_2 & \psi & \psi \end{array}}{\psi} \vee_{E,n_1,n_2}$$

- Esta regra formaliza o **raciocínio por casos**: se $\varphi_1 \vee \varphi_2$ é verdadeira, então φ_1 é verdadeira ou φ_2 é verdadeira, mas não sabemos qual.
 - Se tanto supondo φ_1 (derivação $\mathcal{D}_1$) quanto supondo φ_2 (derivação $\mathcal{D}_2$) conseguimos concluir ψ , então ψ vale de qualquer forma.
 - As hipóteses φ_1 e φ_2 são fechadas: ψ não depende de nenhuma delas.
- Atenção: de $\varphi_1 \vee \varphi_2$ **não** se pode concluir φ_1 (nem φ_2)!

Eliminação da disjunção

- Exemplo 8 Justifique a argumentação abaixo:

“Eu vou de ônibus ou de metrô.

Se eu for de ônibus, chego atrasado.

Se eu for de metrô, chego atrasado.

Logo, eu chego atrasado.”

Eliminação da disjunção

- Exemplo 8 Justifique a argumentação abaixo:

“Eu vou de ônibus ou de metrô.

Se eu for de ônibus, chego atrasado.

Se eu for de metrô, chego atrasado.

Logo, eu chego atrasado.”

Solução. Sejam p : “Eu vou de ônibus”, q : “Eu vou de metrô”, e r : “Eu chego atrasado”.

As premissas são $p \vee q$, $p \rightarrow r$ e $q \rightarrow r$, e a conclusão r é derivada por casos:

$$\frac{\begin{array}{cc} [p]^1 & [q]^2 \\ \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 \\ p \vee q & \begin{array}{c} r \\ r \end{array} \end{array}}{r} \vee_{E,1,2}$$

Note que a conclusão r depende apenas das três premissas: as hipóteses p e q foram fechadas.

Eliminação da disjunção

- Exemplo 8 Justifique a argumentação abaixo:

“Eu vou de ônibus ou de metrô.

Se eu for de ônibus, chego atrasado.

Se eu for de metrô, chego atrasado.

Logo, eu chego atrasado.”

Solução. Sejam p : “Eu vou de ônibus”, q : “Eu vou de metrô”, e r : “Eu chego atrasado”.

As premissas são $p \vee q$, $p \rightarrow r$ e $q \rightarrow r$, e a conclusão r é derivada por casos:

$$\frac{p \vee q \quad \frac{[p]^1 \quad p \rightarrow r}{r} \rightarrow_E \quad \frac{[q]^2 \quad q \rightarrow r}{r} \mathcal{D}_2}{r} \vee_{E,1,2}$$

Note que a conclusão r depende apenas das três premissas: as hipóteses p e q foram fechadas.

Eliminação da disjunção

- Exemplo 8 Justifique a argumentação abaixo:

“Eu vou de ônibus ou de metrô.

Se eu for de ônibus, chego atrasado.

Se eu for de metrô, chego atrasado.

Logo, eu chego atrasado.”

Solução. Sejam p : “Eu vou de ônibus”, q : “Eu vou de metrô”, e r : “Eu chego atrasado”.

As premissas são $p \vee q$, $p \rightarrow r$ e $q \rightarrow r$, e a conclusão r é derivada por casos:

$$\frac{p \vee q \quad \frac{[p]^1 \quad p \rightarrow r}{r} \rightarrow_E \quad \frac{[q]^2 \quad q \rightarrow r}{r} \rightarrow_E}{r} \vee_{E,1,2}$$

Note que a conclusão r depende apenas das três premissas: as hipóteses p e q foram fechadas.



Eliminação do absurdo

- Regra $\perp_E$ (eliminação do absurdo):

$$\frac{\mathcal{D} \quad \perp}{\varphi} \perp_E$$

- De uma contradição pode-se concluir *qualquer* fórmula φ (*ex falso quodlibet*).
- Compare com o que vimos antes: “*de premissas falsas qualquer conclusão é possível*”.

Eliminação do absurdo

- Regra $\perp_E$ (eliminação do absurdo):

$$\frac{\mathcal{D} \quad \perp}{\varphi} \perp_E$$

- De uma contradição pode-se concluir *qualquer* fórmula φ (*ex falso quodlibet*).
- Compare com o que vimos antes: “*de premissas falsas qualquer conclusão é possível*”.
- Esta regra é útil no raciocínio por casos: se um dos casos leva a uma contradição, ele pode ser “descartado”, concluindo-se nele o que a regra $\vee_E$ exigir.
 - No exemplo do restaurante universitário, de $\perp$ poderíamos ter concluído qualquer coisa: por exemplo, que está chovendo (p), embora a premissa (a) diga o contrário!

Regras derivadas: silogismo disjuntivo

- Exemplo 9 Mostre que $\{p \vee q, \neg p\} \vdash q$.

A notação $\Gamma \vdash \varphi$ significa que φ é **derivável** de Γ : há uma derivação de φ cujas premissas (hipóteses não fechadas) estão em Γ .

Regras derivadas: silogismo disjuntivo

- Exemplo 9 Mostre que $\{p \vee q, \neg p\} \vdash q$.

A notação $\Gamma \vdash \varphi$ significa que φ é **derivável** de Γ : há uma derivação de φ cujas premissas (hipóteses não fechadas) estão em Γ .

Solução. Raciocinamos por casos sobre $p \vee q$. No caso p , temos uma contradição com $\neg p$, da qual concluímos q ; no caso q , não há nada a fazer.

$$\frac{\begin{array}{cc} [p]^1 & [q]^2 \\ \mathcal{D}_1 & \mathcal{D}_2 \\ p \vee q & q \end{array}}{q} \vee_{E,1,2}$$



Regras derivadas: silogismo disjuntivo

- Exemplo 9 Mostre que $\{p \vee q, \neg p\} \vdash q$.

A notação $\Gamma \vdash \varphi$ significa que φ é **derivável** de Γ : há uma derivação de φ cujas premissas (hipóteses não fechadas) estão em Γ .

Solução. Raciocinamos por casos sobre $p \vee q$. No caso p , temos uma contradição com $\neg p$, da qual concluímos q ; no caso q , não há nada a fazer.

$$\frac{\begin{array}{c} \frac{[p]^1 \quad \neg p}{\perp} \neg E \\ \frac{\perp}{q} \perp E \end{array} \quad \frac{[q]^2}{q} \mathcal{D}_2}{\frac{p \vee q \quad q}{q} \vee_{E,1,2}}$$



Regras derivadas: silogismo disjuntivo

- Exemplo 9 Mostre que $\{p \vee q, \neg p\} \vdash q$.

A notação $\Gamma \vdash \varphi$ significa que φ é **derivável** de Γ : há uma derivação de φ cujas premissas (hipóteses não fechadas) estão em Γ .

Solução. Raciocinamos por casos sobre $p \vee q$. No caso p , temos uma contradição com $\neg p$, da qual concluímos q ; no caso q , não há nada a fazer.

$$\frac{\frac{p \vee q}{\frac{\frac{[p]^1 \quad \neg p}{\neg E} \quad \frac{\perp}{q} \perp E} \quad [q]^2}{q} \vee_{E,1,2}}$$



Regras derivadas: silogismo disjuntivo

- Exemplo 9 Mostre que $\{p \vee q, \neg p\} \vdash q$.

A notação $\Gamma \vdash \varphi$ significa que φ é **derivável** de Γ : há uma derivação de φ cujas premissas (hipóteses não fechadas) estão em Γ .

Solução. Raciocinamos por casos sobre $p \vee q$. No caso p , temos uma contradição com $\neg p$, da qual concluímos q ; no caso q , não há nada a fazer.

$$\frac{\begin{array}{c} \frac{p \vee q}{p \vee q} \quad \frac{\begin{array}{c} \frac{[p]^1 \quad \neg p}{\perp} \neg E \\ \perp \end{array} \perp E}{q} \quad [q]^2}{q} \vee_{E,1,2}$$

- Uma vez demonstrado que uma conclusão é derivável de certas premissas, podemos usar este fato como uma nova regra, dita **regra derivada**:

$$\frac{p \vee q \quad \neg p}{q} \text{ SD}$$

- Uma regra derivada é apenas uma *abreviação*: sua aplicação pode sempre ser substituída pela derivação que a justifica.
- Esta regra é tradicionalmente chamada de **silogismo disjuntivo**.

Regras derivadas: silogismo disjuntivo

- Exemplo 10 Justifique a argumentação abaixo:

“Zeus é humano ou Zeus é um deus.

Zeus não é humano.

Logo, Zeus é um deus.”

Regras derivadas: silogismo disjuntivo

- Exemplo 10 Justifique a argumentação abaixo:

“Zeus é humano ou Zeus é um deus.

Zeus não é humano.

Logo, Zeus é um deus.”

Solução. Sejam

- p a proposição “Zeus é humano”, e
- q a proposição “Zeus é um deus”.

O argumento utilizou silogismo disjuntivo

$$\frac{p \vee q \quad \neg p}{q} \text{ SD}$$

para concluir q , ou seja, que Zeus é um deus.

Sem a regra derivada, a derivação seria por casos, com $\vee_E$, $\neg_E$ e $\perp_E$, como no exemplo anterior.



Regras de eliminação para lógica proposicional

- Resumo das regras de eliminação:

Conectivo	Regra de eliminação
$\rightarrow$	$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi} \rightarrow E$
$\wedge$	$\frac{\varphi_1 \wedge \varphi_2}{\varphi_1} \wedge E_d$ $\frac{\varphi_1 \wedge \varphi_2}{\varphi_2} \wedge E_e$
$\neg$	$\frac{\varphi \quad \neg \varphi}{\perp} \neg E$
$\perp$	$\frac{\perp}{\varphi} \perp E$

Regra de eliminação de $\vee$		
	$[\varphi_1]^{n_1}$	$[\varphi_2]^{n_2}$
	$\vdots$	$\vdots$
$\varphi_1 \vee \varphi_2$	ψ	ψ
$\vee E, n_1, n_2$		
Regra derivada: silogismo disjuntivo		
$p \vee q$	$\neg p$	
q SD		

Regras com hipóteses

Regras com hipóteses

- As regras vistas até agora, com exceção de $\forall_E$, apenas combinam fórmulas já derivadas: as únicas hipóteses em jogo são as premissas.
- Mas alguns argumentos exigem raciocinar *sob uma hipótese temporária*: para concluir uma negação ou uma implicação, por exemplo, supomos algo, derivamos uma consequência e ao final fechamos a suposição.

Regras com hipóteses

- As regras vistas até agora, com exceção de $\forall_E$, apenas combinam fórmulas já derivadas: as únicas hipóteses em jogo são as premissas.
- Mas alguns argumentos exigem raciocinar *sob uma hipótese temporária*: para concluir uma negação ou uma implicação, por exemplo, supomos algo, derivamos uma consequência e ao final fechamos a suposição.
- Veremos a seguir as regras com hipóteses necessárias para os demais exemplos desta aula:
 - $\neg_I$, para concluir negações;
 - $\rightarrow_I$, para concluir implicações.
- A regra de redução ao absurdo, que também usa uma hipótese, será vista mais adiante.

Introdução da negação

- Regra $\neg_{I,n}$ (introdução da negação):

$$\frac{[\varphi]^n \quad \mathcal{D} \quad \perp}{\neg\varphi} \neg_{I,n}$$

- Para concluir $\neg\varphi$: suponha φ e derive uma contradição.
- A hipótese φ é fechada.

Introdução da negação

- Regra $\neg_{I,n}$ (introdução da negação):

$$\frac{\begin{array}{c} [\varphi]^n \\ \mathcal{D} \\ \perp \end{array}}{\neg\varphi} \neg_{I,n}$$

- Para concluir $\neg\varphi$: suponha φ e derive uma contradição.
- A hipótese φ é fechada.
- Exemplo 11 Mostre que $\{p \rightarrow q, \neg q\} \vdash \neg p$.

Introdução da negação

- Regra $\neg_{I,n}$ (introdução da negação):

$$\frac{\begin{array}{c} [\varphi]^n \\ \mathcal{D} \\ \perp \end{array}}{\neg\varphi} \neg_{I,n}$$

- Para concluir $\neg\varphi$: suponha φ e derive uma contradição.
- A hipótese φ é fechada.
- **Exemplo 11** Mostre que $\{p \rightarrow q, \neg q\} \vdash \neg p$.

Solução. Para concluir $\neg p$ usamos $\neg_I$: supomos p e derivamos $\perp$:

$$\frac{\begin{array}{c} [p]^1 \\ \mathcal{D} \\ \perp \end{array}}{\neg p} \neg_{I,1}$$



Introdução da negação

- Regra $\neg_{I,n}$ (introdução da negação):

$$\frac{\begin{array}{c} [\varphi]^n \\ \mathcal{D} \\ \perp \end{array}}{\neg\varphi} \neg_{I,n}$$

- Para concluir $\neg\varphi$: suponha φ e derive uma contradição.
- A hipótese φ é fechada.
- **Exemplo 11** Mostre que $\{p \rightarrow q, \neg q\} \vdash \neg p$.

Solução. Falta derivar $\perp$: basta obter q e contradizê-lo com $\neg q$:

$$\frac{\begin{array}{c} [p]^1 \\ \mathcal{D} \\ q \end{array} \quad \neg q}{\perp} \neg_E$$
$$\frac{\perp}{\neg p} \neg_{I,1}$$



Introdução da negação

- Regra $\neg_{I,n}$ (introdução da negação):

$$\frac{\begin{array}{c} [\varphi]^n \\ \mathcal{D} \\ \perp \\ \hline \neg\varphi \end{array}}{\neg_{I,n}}$$

- Para concluir $\neg\varphi$: suponha φ e derive uma contradição.
 - A hipótese φ é fechada.
- Exemplo 11** Mostre que $\{p \rightarrow q, \neg q\} \vdash \neg p$.

Solução. Supondo p , obtemos q por $\rightarrow_E$, o que contradiz $\neg q$:

$$\frac{\frac{[p]^1 \quad p \rightarrow q}{q} \rightarrow_E \quad \neg q}{\frac{\perp}{\neg p} \neg_{I,1}} \neg_E$$



Introdução da negação

- Regra $\neg_{I,n}$ (introdução da negação):

$$\frac{\begin{array}{c} [\varphi]^n \\ \mathcal{D} \\ \perp \\ \hline \neg\varphi \end{array}}{\neg_{I,n}}$$

- Para concluir $\neg\varphi$: suponha φ e derive uma contradição.
- A hipótese φ é fechada.
- Exemplo 11** Mostre que $\{p \rightarrow q, \neg q\} \vdash \neg p$.

Solução. Supondo p , obtemos q por $\rightarrow_E$, o que contradiz $\neg q$:

$$\frac{\frac{[p]^1 \quad p \rightarrow q}{q} \rightarrow_E \quad \neg q}{\perp} \neg_E$$
$$\frac{\perp}{\neg p} \neg_{I,1}$$

- Obtemos assim a regra derivada conhecida como **modus tollens**:

$$\frac{p \rightarrow q \quad \neg q}{\neg p} \text{MT}$$

•

Introdução da negação

- Exemplo 12 Justifique a argumentação abaixo:

“Se Zeus é humano, então Zeus é mortal.

Zeus não é mortal.

Logo, Zeus não é humano.”

Introdução da negação

- Exemplo 12 Justifique a argumentação abaixo:

“Se Zeus é humano, então Zeus é mortal.”

Zeus não é mortal.

Logo, Zeus não é humano.”

Solução. Sejam

- p a proposição “Zeus é humano”, e
- q a proposição “Zeus é mortal”.

O argumento utilizou modus tollens

$$\frac{p \rightarrow q \quad \neg q}{\neg p} \text{ MT}$$

para concluir $\neg p$, ou seja, que Zeus não é humano.



Introdução da implicação

- Regra $\rightarrow_{I,n}$ (introdução da implicação):

$$\frac{\begin{array}{c} [\varphi_1]^n \\ \mathcal{D} \\ \varphi_2 \end{array}}{\varphi_1 \rightarrow \varphi_2} \rightarrow_{I,n}$$

- Para concluir $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$: suponha φ_1 e derive φ_2 .
- A hipótese φ_1 é fechada.

Introdução da implicação

- Regra $\rightarrow_{I,n}$ (introdução da implicação):

$$\frac{\begin{array}{c} [\varphi_1]^n \\ \mathcal{D} \\ \varphi_2 \end{array}}{\varphi_1 \rightarrow \varphi_2} \rightarrow_{I,n}$$

- Para concluir $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$: suponha φ_1 e derive φ_2 .
- A hipótese φ_1 é fechada.
- Exemplo 13 Mostre que $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \vdash p \rightarrow r$.

Introdução da implicação

- Regra $\rightarrow_{I,n}$ (introdução da implicação):

$$\frac{\begin{array}{c} [\varphi_1]^n \\ \mathcal{D} \\ \varphi_2 \end{array}}{\varphi_1 \rightarrow \varphi_2} \rightarrow_{I,n}$$

- Para concluir $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$: suponha φ_1 e derive φ_2 .
- A hipótese φ_1 é fechada.
- **Exemplo 13** Mostre que $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \vdash p \rightarrow r$.

Solução. Para concluir $p \rightarrow r$ usamos $\rightarrow_I$: supomos p e derivamos r :

$$\frac{\begin{array}{c} [p]^1 \\ \mathcal{D} \\ r \end{array}}{p \rightarrow r} \rightarrow_{I,1}$$



Introdução da implicação

- Regra $\rightarrow_{I,n}$ (introdução da implicação):

$$\frac{\begin{array}{c} [\varphi_1]^n \\ \mathcal{D} \\ \varphi_2 \end{array}}{\varphi_1 \rightarrow \varphi_2} \rightarrow_{I,n}$$

- Para concluir $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$: suponha φ_1 e derive φ_2 .
- A hipótese φ_1 é fechada.
- **Exemplo 13** Mostre que $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \vdash p \rightarrow r$.

Solução. Falta derivar r : basta obter q e aplicar $\rightarrow_E$ com $q \rightarrow r$:

$$\frac{\begin{array}{c} [p]^1 \\ \mathcal{D} \\ q \end{array} \quad \frac{q \rightarrow r}{r} \rightarrow_E}{\frac{r}{p \rightarrow r} \rightarrow_{I,1}}$$



Introdução da implicação

- Regra $\rightarrow_{I,n}$ (introdução da implicação):

$$\frac{\begin{array}{c} [\varphi_1]^n \\ \mathcal{D} \\ \varphi_2 \end{array}}{\varphi_1 \rightarrow \varphi_2} \rightarrow_{I,n}$$

- Para concluir $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$: suponha φ_1 e derive φ_2 .
- A hipótese φ_1 é fechada.
- **Exemplo 13** Mostre que $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \vdash p \rightarrow r$.

Solução. Supondo p , obtemos q e depois r por $\rightarrow_E$:

$$\frac{\frac{[p]^1 \quad p \rightarrow q}{q} \rightarrow_E \quad q \rightarrow r}{\frac{r}{p \rightarrow r} \rightarrow_{I,1}} \rightarrow_E$$



Introdução da implicação

- Regra $\rightarrow_{I,n}$ (introdução da implicação):

$$\frac{\begin{array}{c} [\varphi_1]^n \\ \mathcal{D} \\ \varphi_2 \end{array}}{\varphi_1 \rightarrow \varphi_2} \rightarrow_{I,n}$$

- Para concluir $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$: suponha φ_1 e derive φ_2 .
- A hipótese φ_1 é fechada.
- **Exemplo 13** Mostre que $\{p \rightarrow q, q \rightarrow r\} \vdash p \rightarrow r$.

Solução. Supondo p , obtemos q e depois r por $\rightarrow_E$:

$$\frac{\frac{[p]^1 \quad p \rightarrow q}{q} \rightarrow_E \quad q \rightarrow r}{\frac{r}{p \rightarrow r} \rightarrow_{I,1}} \rightarrow_E$$

- Obtemos assim a regra derivada conhecida como **silogismo hipotético**:

$$\frac{p \rightarrow q \quad q \rightarrow r}{p \rightarrow r} \text{ SH}$$

•

Introdução da implicação

- Exemplo 14 Justifique a argumentação abaixo:

“Se chover hoje, não faremos um pique-nique hoje.

Se não fizermos um pique-nique hoje, faremos um pique-nique amanhã.

Logo, se chover hoje, faremos um pique-nique amanhã.”

Introdução da implicação

- Exemplo 14 Justifique a argumentação abaixo:

“Se chover hoje, não faremos um pique-nique hoje.

Se não fizermos um pique-nique hoje, faremos um pique-nique amanhã.

Logo, se chover hoje, faremos um pique-nique amanhã.”

Solução. Sejam

- p a proposição “Chove hoje”,
- q a proposição “Não faremos um pique-nique hoje”, e
- r a proposição “Faremos um pique-nique amanhã”.

O argumento utilizou silogismo hipotético

$$\frac{p \rightarrow q \quad q \rightarrow r}{p \rightarrow r} \text{ SH}$$

para concluir $p \rightarrow r$, i.e., que se chover hoje faremos um pique-nique amanhã.



Construindo demonstrações

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- É possível que precisemos aplicar várias regras de inferência para demonstrar uma conclusão a partir de premissas.

- Exemplo 15 Mostre que as premissas

- Ⓐ *"Esta tarde não está ensolarada, e está mais frio hoje que ontem."*
- Ⓑ *"Nós vamos nadar somente se estiver ensolarado."*
- Ⓒ *"Se nós não formos nadar, vamos andar de canoa."*
- Ⓓ *"Se formos andar de canoa, estaremos em casa ao pôr do sol."*

levam à conclusão:

"Estaremos em casa ao pôr do sol."

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 15 (Continuação)

Solução. Para formalizar os fatos que você sabe, vamos usar as proposições:

- p : “Esta tarde está ensolarada.”
- q : “Está mais frio hoje que ontem.”
- r : “Nós vamos nadar.”
- s : “Nós vamos andar de canoa.”
- t : “Estaremos em casa ao pôr do sol.”

Assim, as premissas são:

$$(a) \quad \neg p \wedge q$$

$$(b) \quad r \rightarrow p$$

$$(c) \quad \neg r \rightarrow s$$

$$(d) \quad s \rightarrow t$$

E a conclusão é t .

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 15 (Continuação)

Podemos construir uma derivação da conclusão a partir das premissas da seguinte forma:

$$\frac{\mathcal{D} \quad \frac{s \quad s \rightarrow t}{t}}{\quad} \rightarrow E$$

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 15 (Continuação)

Podemos construir uma derivação da conclusão a partir das premissas da seguinte forma:

$$\frac{\mathcal{D} \quad \frac{\neg r \quad \neg r \rightarrow s}{s} \rightarrow E \quad s \rightarrow t}{t} \rightarrow E$$

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 15 (Continuação)

Podemos construir uma derivação da conclusão a partir das premissas da seguinte forma:

$$\begin{array}{c} [r]^1 \\ \mathcal{D} \\ \frac{\perp}{\neg r} \neg I, 1 \quad \frac{\neg r \rightarrow s}{s} \rightarrow E \quad \frac{s \rightarrow t}{t} \rightarrow E \end{array}$$

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 15 (Continuação)

Podemos construir uma derivação da conclusão a partir das premissas da seguinte forma:

$$\begin{array}{c} [r]^1 \\ \mathcal{D}_1 \quad \mathcal{D}_2 \\ p \quad \neg p \\ \hline \perp \quad \neg E \\ \hline \neg r \quad \neg I,1 \\ \hline s \quad \neg r \rightarrow s \quad \rightarrow E \\ \hline s \rightarrow t \quad \rightarrow E \\ \hline t \end{array}$$

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 15 (Continuação)

Podemos construir uma derivação da conclusão a partir das premissas da seguinte forma:

$$\frac{\frac{\frac{[r]^1 \quad r \rightarrow p}{p} \rightarrow E \quad \mathcal{D}_2 \quad \neg p}{\perp} \neg E}{\neg r} \neg I,1 \quad \frac{\neg r \rightarrow s}{s} \rightarrow E \quad \frac{s \rightarrow t}{t} \rightarrow E$$

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 15 (Continuação)

Podemos construir uma derivação da conclusão a partir das premissas da seguinte forma:

$$\frac{\frac{\frac{[r]^1}{p} \rightarrow E \quad \frac{\frac{\neg p \wedge q}{\neg p} \wedge E_d}{\neg p} \neg E}{\perp} \neg I,1}{\neg r} \rightarrow E \quad \frac{\neg r \rightarrow s}{s} \rightarrow E \quad \frac{s \rightarrow t}{t} \rightarrow E$$

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 15 (Continuação)

Podemos construir uma derivação da conclusão a partir das premissas da seguinte forma:

$$\frac{\frac{\frac{[r]^1}{p} \rightarrow E \quad \frac{\neg p \wedge q}{\neg p} \wedge E_d}{\perp} \neg E}{\neg r} \neg I,1 \quad \frac{\neg r \rightarrow s}{s} \rightarrow E \quad \frac{s \rightarrow t}{t} \rightarrow E$$

- Lendo a árvore de baixo para cima: para concluir t precisamos de s ; para concluir s precisamos de $\neg r$; e para concluir $\neg r$ supomos r e chegamos a uma contradição, usando a premissa (a).

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 15 (Continuação)

Podemos construir uma derivação da conclusão a partir das premissas da seguinte forma:

$$\frac{\frac{\frac{[r]^1}{p} \rightarrow E}{\perp} \neg I,1}{\neg r} \neg E \quad \frac{\frac{\neg p \wedge q}{\neg p} \wedge E_d}{\neg r \rightarrow s} \rightarrow E \quad \frac{s}{s \rightarrow t} \rightarrow E$$

- Lendo a árvore de baixo para cima: para concluir t precisamos de s ; para concluir s precisamos de $\neg r$; e para concluir $\neg r$ supomos r e chegamos a uma contradição, usando a premissa (a).
- Usando a regra derivada MT, a subderivação de $\neg r$ se abrevia:

$$\frac{r \rightarrow p \quad \frac{\neg p \wedge q}{\neg p} \wedge E_d}{\neg r} \text{MT}$$

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 16

 Ao sair para a universidade de manhã eu percebo que não estou usando meus óculos.

Ao tentar descobrir onde estão meus óculos, me lembro dos seguintes fatos, que são todos verdadeiros:

- (a) Se meus óculos estão na bancada da cozinha, então eu os vi durante o café da manhã.
- (b) Eu estava lendo o jornal na sala ou estava lendo o jornal na cozinha.
- (c) Se eu estava lendo o jornal na sala, então meus óculos estão na mesinha de centro.
- (d) Eu não vi meus óculos durante o café da manhã.
- (e) Se eu estava lendo um livro na cama, então meus óculos estão no criado-mudo.
- (f) Se eu estava lendo o jornal na cozinha, então meus óculos estão na bancada da cozinha.

Usando regras de inferência válidas, quero deduzir onde estão meus óculos.

Usando regras de inferência para construir demonstrações

Exemplo 16 (Continuação)

Solução. Para formalizar os fatos que eu sei, vamos usar as proposições:

- p : "Os meus óculos estão na bancada da cozinha."
- q : "Eu vi meus óculos durante café da manhã."
- r : "Eu estava lendo o jornal na sala."
- s : "Eu estava lendo o jornal na cozinha."
- t : "Meus óculos estão na mesinha de centro."
- u : "Eu estava lendo um livro na cama."
- v : "Meus óculos estão no criado-mudo."

Assim, os fatos que eu sei são:

$$(a) \quad p \rightarrow q$$

$$(c) \quad r \rightarrow t$$

$$(e) \quad u \rightarrow v$$

$$(b) \quad r \vee s$$

$$(d) \quad \neg q$$

$$(f) \quad s \rightarrow p$$

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 16 (Continuação)

Se eu quero deduzir onde estão os óculos eu preciso que os fatos que eu sei me permitam concluir:

- ou p (óculos na bancada da cozinha)
 - ou t (óculos na mesinha do centro)
 - ou v (óculos no criado mudo)
- Note que o “ou” acima deve ser exclusivo para que o conjunto de fórmulas que estamos escrevendo faça sentido.
 - Os óculos não podem estar simultaneamente em mais de um lugar.
 - Logo eu *não* devo conseguir deduzir simultaneamente mais do que uma das opções acima a partir das premissas.

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 16 (Continuação)

Vamos deduzir que os óculos se encontram na mesinha do centro (t).

- Com as regras derivadas MT e SD, toda a derivação se abrevia como:

$$\frac{\mathcal{D}}{t}$$

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 16 (Continuação)

Vamos deduzir que os óculos se encontram na mesinha do centro (t).

- Com as regras derivadas MT e SD, toda a derivação se abrevia como:

$$\frac{\mathcal{D} \quad \frac{r \quad r \rightarrow t}{t} \rightarrow_E}{t} \rightarrow_E$$

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 16 (Continuação)

Vamos deduzir que os óculos se encontram na mesinha do centro (t).

- Com as regras derivadas MT e SD, toda a derivação se abrevia como:

$$\frac{\frac{r \vee s}{r} \quad \frac{\mathcal{D} \quad \neg s}{\text{SD}}}{t} \rightarrow_E r \rightarrow t$$

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 16 (Continuação)

Vamos deduzir que os óculos se encontram na mesinha do centro (t).

- Com as regras derivadas MT e SD, toda a derivação se abrevia como:

$$\frac{\frac{r \vee s}{r} \quad \frac{\frac{s \rightarrow p}{\neg s} \quad \frac{\mathcal{D} \quad \neg p}{\neg p} \text{ MT}}{r} \text{ SD} \quad r \rightarrow t}{t} \rightarrow_E$$

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 16 (Continuação)

Vamos deduzir que os óculos se encontram na mesinha do centro (t).

- Com as regras derivadas MT e SD, toda a derivação se abrevia como:

$$\frac{\frac{r \vee s}{r} \quad \frac{\frac{s \rightarrow p}{\neg s} \text{ SD} \quad \frac{\frac{p \rightarrow q}{\neg p} \quad \neg q}{p} \text{ MT}}{t} \text{ MT} \quad r \rightarrow t}{t} \rightarrow_E$$

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 16 (Continuação)

Sem usar regras derivadas, podemos construir uma demonstração da seguinte maneira: como (c) é $r \rightarrow t$, basta concluir r ; e como (b) é $r \vee s$, basta descartar o caso s .

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 16 (Continuação)

Sem usar regras derivadas, podemos construir uma demonstração da seguinte maneira: como (c) é $r \rightarrow t$, basta concluir r ; e como (b) é $r \vee s$, basta descartar o caso s .

- Primeiro concluímos $\neg p$ a partir de (a) e (d):

$$\frac{\begin{array}{c} [p]^1 \\ \mathcal{D} \\ \perp \end{array}}{\neg p} \neg I, 1$$

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 16 (Continuação)

Sem usar regras derivadas, podemos construir uma demonstração da seguinte maneira: como (c) é $r \rightarrow t$, basta concluir r ; e como (b) é $r \vee s$, basta descartar o caso s .

- Primeiro concluímos $\neg p$ a partir de (a) e (d):

$$\begin{array}{c} [p]^1 \\ \mathcal{D} \\ q \quad \neg q \\ \hline \perp \\ \hline \neg p \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \neg E \\ \neg I,1 \end{array}$$

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 16 (Continuação)

Sem usar regras derivadas, podemos construir uma demonstração da seguinte maneira: como (c) é $r \rightarrow t$, basta concluir r ; e como (b) é $r \vee s$, basta descartar o caso s .

- Primeiro concluímos $\neg p$ a partir de (a) e (d):

$$\frac{\frac{[p]^1 \quad p \rightarrow q}{q} \rightarrow_E \quad \neg q}{\frac{\perp}{\neg p} \neg I,1} \neg E$$

Chamemos esta derivação de $\mathcal{D}_1$.

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 16 (Continuação)

Sem usar regras derivadas, podemos construir uma demonstração da seguinte maneira: como (c) é $r \rightarrow t$, basta concluir r ; e como (b) é $r \vee s$, basta descartar o caso s .

- Primeiro concluímos $\neg p$ a partir de (a) e (d):

$$\frac{\frac{[p]^1 \quad p \rightarrow q}{q} \rightarrow_E \quad \neg q}{\frac{\perp}{\neg p} \neg_{I,1}} \neg_E$$

Chamemos esta derivação de $\mathcal{D}_1$.

- Em seguida concluímos $\neg s$ a partir de (f) e de $\mathcal{D}_1$:

$$\frac{\frac{[s]^2}{\mathcal{D}} \quad \perp}{\neg s} \neg_{I,2}$$

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 16 (Continuação)

Sem usar regras derivadas, podemos construir uma demonstração da seguinte maneira: como (c) é $r \rightarrow t$, basta concluir r ; e como (b) é $r \vee s$, basta descartar o caso s .

- Primeiro concluímos $\neg p$ a partir de (a) e (d):

$$\frac{\frac{[p]^1 \quad p \rightarrow q}{q} \rightarrow E \quad \neg q}{\frac{\perp}{\neg p} \neg I,1} \neg E$$

Chamemos esta derivação de $\mathcal{D}_1$.

- Em seguida concluímos $\neg s$ a partir de (f) e de $\mathcal{D}_1$:

$$\frac{\frac{\mathcal{D} \quad \mathcal{D}_1}{p \quad \neg p} \neg E}{\frac{\perp}{\neg s} \neg I,2}$$

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 16 (Continuação)

Sem usar regras derivadas, podemos construir uma demonstração da seguinte maneira: como (c) é $r \rightarrow t$, basta concluir r ; e como (b) é $r \vee s$, basta descartar o caso s .

- Primeiro concluímos $\neg p$ a partir de (a) e (d):

$$\frac{\frac{[p]^1 \quad p \rightarrow q}{q} \rightarrow E \quad \neg q}{\frac{\perp}{\neg p} \neg I,1} \neg E$$

Chamemos esta derivação de $\mathcal{D}_1$.

- Em seguida concluímos $\neg s$ a partir de (f) e de $\mathcal{D}_1$:

$$\frac{\frac{[s]^2 \quad s \rightarrow p}{p} \rightarrow E \quad \frac{\mathcal{D}_1}{\neg p} \neg E}{\frac{\perp}{\neg s} \neg I,2} \neg E$$

Chamemos esta derivação de $\mathcal{D}_2$.

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 16 (Continuação)

Finalmente, raciocinamos por casos sobre (b), usando $\mathcal{D}_2$ para descartar o caso s , e concluímos t com (c):

$$\frac{\mathcal{D} \quad \frac{r \quad r \rightarrow t}{t}}{t} \rightarrow_E$$

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 16 (Continuação)

Finalmente, raciocinamos por casos sobre (b), usando $\mathcal{D}_2$ para descartar o caso s , e concluímos t com (c):

$$\frac{\frac{r \vee s \quad [r]^3}{r} \quad \frac{[s]^4 \quad \mathcal{D} \quad r}{\vee E, 3, 4} \quad r \rightarrow t}{t} \rightarrow E$$

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 16 (Continuação)

Finalmente, raciocinamos por casos sobre (b), usando $\mathcal{D}_2$ para descartar o caso s , e concluímos t com (c):

$$\frac{\frac{r \vee s \quad [r]^3}{r} \quad \frac{\frac{[s]^4 \quad \mathcal{D}}{\perp} \quad \frac{\perp}{r}}{\vee E, 3, 4} \quad r \rightarrow t}{t} \rightarrow E$$

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 16 (Continuação)

Finalmente, raciocinamos por casos sobre (b), usando $\mathcal{D}_2$ para descartar o caso s , e concluímos t com (c):

$$\frac{\frac{r \vee s}{r} \quad \frac{[r]^3}{r} \quad \frac{\frac{\frac{[s]^4}{\neg s} \neg E}{\perp} \perp E}{\vee E, 3, 4} \quad r \rightarrow t}{t} \rightarrow E$$

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 16 (Continuação)

Finalmente, raciocinamos por casos sobre (b), usando $\mathcal{D}_2$ para descartar o caso s , e concluímos t com (c):

$$\frac{\frac{r \vee s}{r} \quad \frac{[r]^3 \quad \frac{\frac{\frac{[s]^4 \quad \mathcal{D}_2}{\neg s} \neg E}{\perp} \perp E}{\vee E, 3, 4} \quad r \rightarrow t}{t} \rightarrow E$$

- Com as regras derivadas MT e SD, toda a derivação se abrevia como:

$$\frac{r \vee s}{r} \quad \frac{s \rightarrow p \quad \frac{p \rightarrow q \quad \neg q}{\neg p} \text{ MT}}{\neg s} \text{ SD} \quad r \rightarrow t \rightarrow E$$

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 16** (Continuação)

Finalmente, raciocinamos por casos sobre (b), usando $\mathcal{D}_2$ para descartar o caso s , e concluímos t com (c):

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 r \vee s \quad [r]^3 \\
 \hline
 r
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \frac{\perp}{r} \quad \perp E \\
 \hline
 \frac{[s]^4 \quad \mathcal{D}_2 \quad \neg s}{\perp} \neg E \\
 \hline
 \perp E, 3, 4
 \end{array} \\
 \hline
 \frac{r \quad \frac{[s]^4 \quad \mathcal{D}_2 \quad \neg s}{\perp} \neg E}{\perp} \perp E, 3, 4
 \end{array}
 \quad
 \frac{r \rightarrow t}{t} \rightarrow E
 \end{array}$$

- Com as regras derivadas MT e SD, toda a derivação se abrevia como:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 r \vee s \quad \frac{s \rightarrow p}{r} \text{SD} \\
 \hline
 r
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \frac{p \rightarrow q \quad \neg q}{\neg p} \text{MT} \\
 \hline
 \frac{\neg p}{\neg s} \text{MT} \\
 \hline
 \frac{\neg s}{\perp} \text{SD}
 \end{array}
 \quad
 \frac{r \rightarrow t}{t} \rightarrow E
 \end{array}$$

- Como exercício, justifique que a partir das premissas não conseguimos deduzir que os óculos estão na cozinha (p) ou no criado mudo (v).



Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 16 (Continuação)

Finalmente, raciocinamos por casos sobre (b), usando $\mathcal{D}_2$ para descartar o caso s , e concluímos t com (c):

$$\frac{\mathcal{D} \quad \frac{r \quad r \rightarrow t}{t}}{t} \rightarrow E$$

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 16 (Continuação)

Finalmente, raciocinamos por casos sobre (b), usando $\mathcal{D}_2$ para descartar o caso s , e concluímos t com (c):

$$\frac{\frac{r \vee s \quad [r]^3}{r} \quad \frac{[s]^4 \quad \mathcal{D} \quad r}{\vee E, 3, 4} \quad r \rightarrow t}{t} \rightarrow E$$

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 16 (Continuação)

Finalmente, raciocinamos por casos sobre (b), usando $\mathcal{D}_2$ para descartar o caso s , e concluímos t com (c):

$$\frac{\frac{r \vee s}{r} \quad \frac{\frac{[r]^3}{r} \quad \frac{\frac{[s]^4}{\mathcal{D}} \quad \frac{\perp}{r} \perp E}{\vee E, 3, 4}}{t} \quad r \rightarrow t}{t} \rightarrow E$$

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 16 (Continuação)

Finalmente, raciocinamos por casos sobre (b), usando $\mathcal{D}_2$ para descartar o caso s , e concluímos t com (c):

$$\frac{\frac{r \vee s \quad [r]^3}{r} \quad \frac{\frac{[s]^4 \quad \mathcal{D}_2}{\neg s} \neg E \quad \frac{\perp}{r} \perp E}{\vee E, 3, 4} \quad r \rightarrow t}{t} \rightarrow E$$

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 16 (Continuação)

Finalmente, raciocinamos por casos sobre (b), usando $\mathcal{D}_2$ para descartar o caso s , e concluímos t com (c):

$$\frac{\frac{r \vee s \quad [r]^3}{r} \quad \frac{\frac{[s]^4 \quad \mathcal{D}_2}{\neg s} \quad \neg E}{\frac{\perp}{r}} \quad \perp E}{\vee E, 3, 4} \quad \frac{r \rightarrow t}{\rightarrow E} \quad t$$

Usando regras de inferência para construir demonstrações

- Exemplo 16 (Continuação)

Finalmente, raciocinamos por casos sobre (b), usando $\mathcal{D}_2$ para descartar o caso s , e concluímos t com (c):

$$\frac{\frac{r \vee s}{r} \quad \frac{[r]^3 \quad \frac{\frac{[s]^4 \quad \mathcal{D}_2 \quad \neg s}{\perp} \neg E}{r} \perp E}{r \vee E, 3, 4} \quad r \rightarrow t}{t} \rightarrow E$$

- Como exercício, justifique que a partir das premissas *não* conseguimos deduzir que os óculos estão na cozinha (p) ou no criado mudo (v).



Resumo: regras tradicionais em dedução natural

- As regras de inferência tradicionais são regras de dedução natural ou regras derivadas delas:

Nome tradicional	Inferência	Em dedução natural
Modus ponens	$p, p \rightarrow q \vdash q$	$\rightarrow E$
Simplificação conjuntiva	$p \wedge q \vdash p$	$\wedge E_d, \wedge E_e$
Adição conjuntiva	$p, q \vdash p \wedge q$	$\wedge I$
Adição disjuntiva	$p \vdash p \vee q$	$\vee I_d, \vee I_e$
Silogismo disjuntivo	$p \vee q, \neg p \vdash q$	derivada: $\vee E, \neg E, \perp E$
Modus tollens	$p \rightarrow q, \neg q \vdash \neg p$	derivada: $\neg I, \rightarrow E, \neg E$
Silogismo hipotético	$p \rightarrow q, q \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$	derivada: $\rightarrow I, \rightarrow E$
Resolução	$p \vee q, \neg p \vee r \vdash q \vee r$	derivada (exercício)