

DCC638 - Introdução à Lógica Computacional  
2026.1

# Álgebra Booleana e Circuitos Lógicos

Área de Teoria DCC/UFMG

# Portas Lógicas

# Portas lógicas: Introdução

- A álgebra Booleana pode ser usada para modelar circuitos eletrônicos:
  - Entradas e saídas de um circuito podem ser consideradas 0 ou 1.
  - Computadores e dispositivos eletrônicos em geral são compostos por vários destes circuitos.
- Os elementos básicos dos circuitos são chamadas **portas lógicas**.
  - Cada porta lógica implementa uma operação Booleana.
- Os circuitos que vamos estudar não têm capacidade de memória
  - Comportamento funcional: saídas dependem apenas das entradas dadas
  - Chamamos tais dispositivos de **circuitos combinatórios**.

# Portas lógicas

- Vamos nos concentrar em três tipos de portas lógicas.

- A **porta NOT** (ou **inversor**) que implementa a operação de complementação:



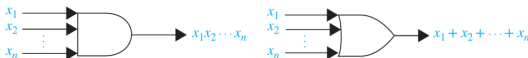
- A **porta OR**, que implementa a operação de soma Booleana:



- A **porta AND**, que implementa a operação de produto Booleano:



- É possível considerar portas com várias entradas:

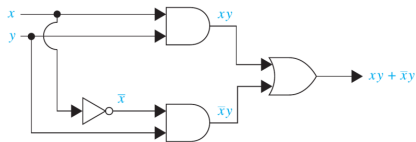
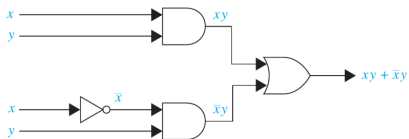


# Circuitos combinatórios

- Circuitos combinatórios podem ser construídos usando uma combinação de inversores, portas OR e portas AND.
- Quando são formadas combinações de circuitos, algumas portas podem compartilhar entradas.

Existem maneiras diferentes de representar isto graficamente.

- **Exemplo 1** As figuras abaixo são representações distintas do mesmo circuito combinatório que produz a saída  $xy + \bar{x}y$ , em que algumas portas compartilham entradas.



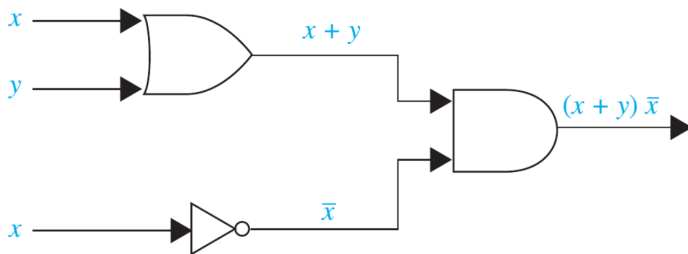
# Circuitos combinatórios

- Exemplo 2 Projete um circuito que compute a função Booleana  $(x + y)\bar{x}$ .

# Circuitos combinatórios

- Exemplo 2 Projete um circuito que compute a função Booleana  $(x + y)\bar{x}$ .

**Solução.** O circuito desejado está desenhado a seguir.



# Exemplos de circuitos: Votação majoritária

- **Exemplo 3** Um comitê de três indivíduos decide questões para uma organização da seguinte forma:

1. Cada indivíduo vota sim ou não para cada proposta que surgir.
2. Uma proposta é aprovada se receber pelo menos dois votos sim.

Projete um circuito que determine se uma proposta é ou não aprovada.

**Solução.** Começamos por modelar as entradas do sistema de votação. Sejam:

- $x = 1$  se o primeiro indivíduo votar sim, e  $x = 0$  se este indivíduo votar não;
- $y = 1$  se o segundo indivíduo votar sim, e  $y = 0$  se este indivíduo votar não;
- $z = 1$  se o terceiro indivíduo vota sim e  $z = 0$  se este indivíduo votar não.

Então um circuito deve ser projetado que produz a saída 1 a partir das entradas  $x$ ,  $y$  e  $z$  quando dois ou mais de  $x$ ,  $y$ , e  $z$  são 1.

# Exemplos de circuitos: Votação majoritária

- Exemplo 3 (Continuação)

Para obter uma expressão Booleana que expresse a função desejada, vamos especificar a tabela da função de votação majoritária.

x	y	z	Votação majoritária
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Podemos derivar a forma normal disjuntiva da expressão desejada:

$$\bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz$$

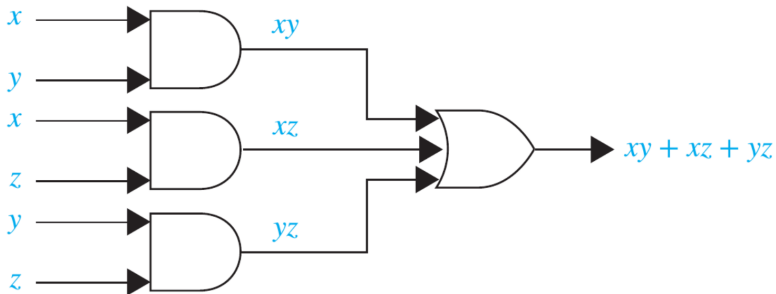
que podemos mostrar ser equivalente a

$$xy + xz + yz .$$

# Exemplos de circuitos: Votação majoritária

- Exemplo 3 (Continuação)

A votação majoritária é modelada, portanto, pela expressão  $xy + xz + yz$ , que pode ser implementada no circuito a seguir.



# Exemplos de circuitos: Somadores

- **Exemplo 4** Neste exemplo vamos mostrar como circuitos lógicos podem ser usados para realizar a adição de inteiros positivos em forma binária.

Vamos construir o circuito para fazer essa adição a partir de alguns circuitos componentes.

Primeiro, vamos construir um circuito **meio somador**, que adiciona dois bits sem considerar o “vai um” de uma adição anterior.

Tal circuito tem:

- Como entradas: dois bits  $x$  e  $y$ ; e
- Como saídas: dois bits  $s$  e  $c$ , onde  $s$  é o bit da soma e  $c$  é o bit do “vai um”.

Circuitos assim são chamados de **circuitos de saída múltipla**, pois têm mais de um saída.

# Exemplos de circuitos: Somadores

- Exemplo 4 (Continuação)

A tabela a seguir demonstra o comportamento desejado do meio somador.

Entradas		Saídas	
$x$	$y$	$s$	$c$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

Por conveniência, vamos transformar a expressão de  $s$  em uma equivalente antes de implementar o circuito:

Podemos derivar as expressões:

$$s = \bar{x}y + x\bar{y}$$

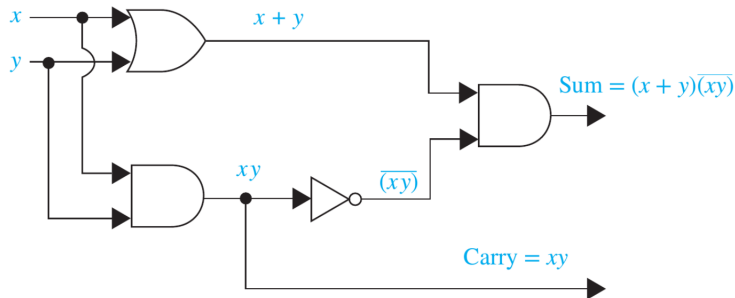
$$c = xy$$

$$\begin{aligned} s &= \bar{x}y + x\bar{y} && \text{(Exp. original)} \\ &= (\bar{x}y + 0) + (0 + x\bar{y}) && \text{(Identidade)} \\ &= (\bar{x}y + y\bar{y}) + (x\bar{x} + x\bar{y}) && \text{(Prop. do zero)} \\ &= (x + y)(\bar{x} + \bar{y}) && \text{(Distrib.)} \\ &= (x + y)\overline{(xy)} && \text{(De Morgan)} \end{aligned}$$

# Exemplos de circuitos: Somadores

- Exemplo 4 (Continuação)

Assim, um circuito que implementa o meio somador é o seguinte:



# Exemplos de circuitos: Somadores

- Exemplo 4 (Continuação)

Agora, para completar o somador, vamos projetar um **somador completo**, que considera o “vai um” de uma soma de bits anterior.

Este circuito tem:

- Como entradas: dois bits  $x$  e  $y$ , além de um bit de “vai um”  $c_i$
- Como saídas: dois bits  $s$  e  $c$ , onde  $s$  é o bit da soma e  $c_{i+1}$  é o bit do “vai um”.

# Exemplos de circuitos: Somadores

- Exemplo 4 (Continuação)

A tabela a seguir demonstra o comportamento desejado somador completo.

Entradas			Saídas	
$x$	$y$	$c_i$	$s$	$c_{i+1}$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

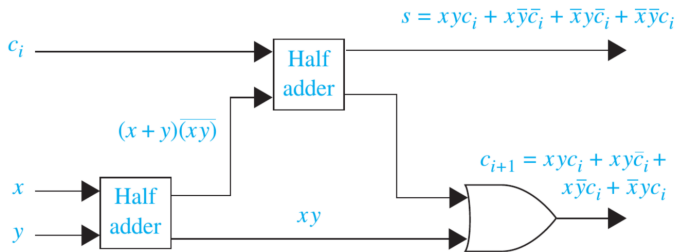
Podemos derivar as expressões:

$$s = \bar{x}\bar{y}c_i + \bar{x}y\bar{c}_i + x\bar{y}\bar{c}_i + xy c_i$$

$$c_{i+1} = \bar{x}y c_i + x\bar{y} c_i + x y \bar{c}_i + x y c_i$$

# Exemplos de circuitos: Somadores

- O circuito do somador completo encontra-se abaixo.



Note que poderíamos ter construído o somador completo diretamente a partir das fórmulas derivadas para  $s$  e  $c_{i+1}$ , mas optamos por uma forma equivalente usando meio-somadores, que é um componente que já projetamos. (Desafio: você pode checar que a implementação é equivalente usando tabelas da verdade!)

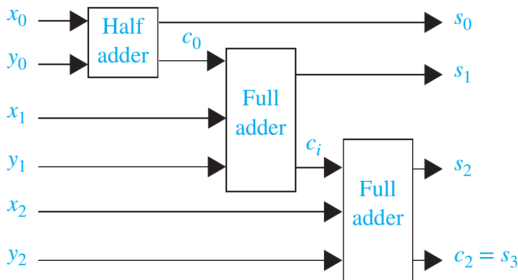
A prática de construir circuitos maiores usando componentes já desenhados é muito comum no projeto de circuitos reais.

# Exemplos de circuitos: Somadores

- Exemplo 4 (Continuação)

Para finalizar o exemplo, vemos um circuito para somar dois inteiros de 3 bits cada, usando um meio somador e dois somadores completos.

$$\begin{array}{rcccccc} & (c_2) & (c_1) & (c_0) & & \text{("vai um")} \\ & & x_2 & x_1 & x_0 & \text{(1ª parcela)} \\ + & & y_2 & y_1 & y_0 & \text{(2ª parcela)} \\ \hline s_3 & s_2 & s_1 & s_0 & & \text{(resultado)} \end{array}$$



# Minimização de Circuitos

# Minimização de Circuitos: Introdução

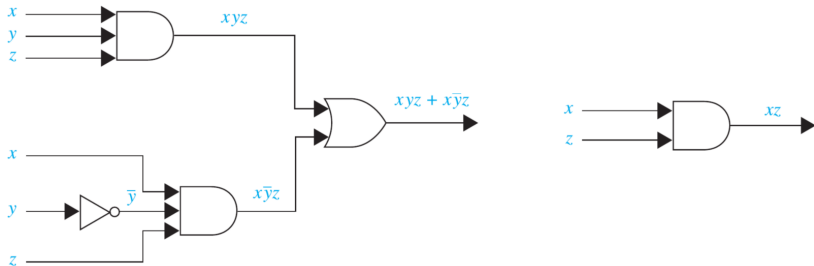
- A eficiência de um circuito combinatório depende do número e da disposição de suas portas.
- O processo de projetar um circuito combinatório começa com a tabela especificando a saída para cada combinação de valores de entrada.
- Podemos sempre usar a forma normal disjuntiva (DNF) pra implementar um circuito.
  - No entanto ela pode conter mais termos do que o necessário.
- Veremos como simplificar expressões Booleanas para minimizar circuitos que as implementam.

# Minimização de Circuitos: Introdução

- Exemplo 5 Considere a seguinte simplificação de uma expressão Booleana:

$$\begin{aligned}xyz + x\bar{y}z &= (y + \bar{y})xz && \text{(distributividade)} \\ &= 1xz && \text{(unidade)} \\ &= xz && \text{(identidade)}\end{aligned}$$

Note que a implementação de um circuito para a mesma função pode ser muito mais econômica após a simplificação:



# Minimização de circuitos: Mapas de Karnaugh

- A minimização de funções Booleanas:
  - reduz o número de portas em um chip, produzindo circuitos mais confiáveis e baratos,
  - possibilita a implementação de mais circuitos em um mesmo chip, contribuindo para a minimização do tamanho físico de componentes eletrônicos, e
  - reduz o tempo usado por um circuito para calcular sua saída.
- Estudaremos o procedimento conhecido como **mapas de Karnaugh** ou **mapas-K**)
  - Projetado na década de 1950 para ajudar a minimizar os circuitos à mão.
  - Úteis na minimização de circuitos com até seis variáveis (embora se tornem bastante complexos para cinco ou seis variáveis.)

# Minimização de circuitos: Mapas de Karnaugh

- Considere as DNFs de funções Booleanas de duas variáveis  $x$  e  $y$ .

- Existem quatro mintermos possíveis:

- $x y$

- $\bar{x} y$

- $\bar{y} x$

- $\bar{x} \bar{y}$

- O mapa de Karnaugh correspondente tem quatro células, uma pra cada mintermo

- "1" é colocado na célula se o mintermo ocorrer da DNF

- Células são ditas **adjacentes** se os mintermos que elas representam diferirem exatamente um literal.

- Por exemplo, a célula que representa  $x y$  é adjacente às células que representam  $\bar{x} y$  e  $x \bar{y}$ .

	$y$	$\bar{y}$
$x$	$x y$	$x \bar{y}$
$\bar{x}$	$\bar{x} y$	$\bar{x} \bar{y}$

# Minimização de circuitos: Mapas de Karnaugh

- Exemplo 6 Encontre mapas de Karnaugh para as expressões Booleanas:

a)  $x y + \bar{x} y$

b)  $x \bar{y} + \bar{x} y$

c)  $x \bar{y} + \bar{x} y + \bar{x} \bar{y}$

# Minimização de circuitos: Mapas de Karnaugh

- Exemplo 6 Encontre mapas de Karnaugh para as expressões Booleanas:

a)  $xy + \bar{x}y$

b)  $x\bar{y} + \bar{x}y$

c)  $x\bar{y} + \bar{x}y + \bar{x}\bar{y}$

**Solução.** Os mapas de Karnaugh são dados abaixo.

	$y$	$\bar{y}$
$x$	1	
$\bar{x}$	1	

	$y$	$\bar{y}$
$x$		1
$\bar{x}$	1	

	$y$	$\bar{y}$
$x$		1
$\bar{x}$	1	1



# Minimização de circuitos: Mapas de Karnaugh

- O mapa de Karnaugh identifica mintermos a serem combinados:
  - ① Mintermos adjacentes com 1s em suas células podem ser combinados em um produto envolvendo apenas uma das variáveis.
    - A outra variável ocorre com e sem complemento
    - Por exemplo,  $x\bar{y}$  e  $\bar{x}\bar{y}$  são adjacentes e podem ser combinados em  $\bar{y}$  porque

$$x\bar{y} + \bar{x}\bar{y} = (x + \bar{x})\bar{y} = 1\bar{y} = \bar{y}$$

# Minimização de circuitos: Mapas de Karnaugh

- O mapa de Karnaugh identifica mintermos a serem combinados:
  1. Mintermos adjacentes com 1s em suas células podem ser combinados em um produto envolvendo apenas uma das variáveis.
    - A outra variável ocorre com e sem complemento
    - Por exemplo,  $x\bar{y}$  e  $\bar{x}\bar{y}$  são adjacentes e podem ser combinados em  $\bar{y}$  porque

$$x\bar{y} + \bar{x}\bar{y} = (x + \bar{x})\bar{y} = 1\bar{y} = \bar{y}$$

2. Se todas as células contêm 1s, os quatro mintermos podem ser combinados, eliminando todas as variáveis e resultando na expressão Booleana 1.

# Minimização de circuitos: Mapas de Karnaugh

- O mapa de Karnaugh identifica mintermos a serem combinados:
  1. Mintermos adjacentes com 1s em suas células podem ser combinados em um produto envolvendo apenas uma das variáveis.
    - A outra variável ocorre com e sem complemento
    - Por exemplo,  $x\bar{y}$  e  $\bar{x}\bar{y}$  são adjacentes e podem ser combinados em  $\bar{y}$  porque

$$x\bar{y} + \bar{x}\bar{y} = (x + \bar{x})\bar{y} = 1\bar{y} = \bar{y}$$

2. Se todas as células contêm 1s, os quatro mintermos podem ser combinados, eliminando todas as variáveis e resultando na expressão Booleana 1.
  3. Circulamos blocos de células no mapa de Karnaugh, representando os mintermos que podem ser combinados.
- O objetivo é identificar os maiores blocos possíveis

# Minimização de circuitos: Mapas de Karnaugh

- Exemplo 7 Simplifique as somas de produtos das expressões Booleanas do exemplo anterior:

a)  $x y + \bar{x} y$

b)  $x \bar{y} + \bar{x} y$

c)  $x \bar{y} + \bar{x} y + \bar{x} \bar{y}$

**Solução.** Agrupamos os mintermos com o procedimento descrito anteriormente, obtendo os seguintes mapas de Karnaugh:

	$y$	$\bar{y}$
$x$	1	
$\bar{x}$	1	

	$y$	$\bar{y}$
$x$		1
$\bar{x}$	1	

	$y$	$\bar{y}$
$x$		1
$\bar{x}$	1	1

# Minimização de circuitos: Mapas de Karnaugh

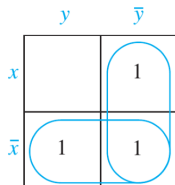
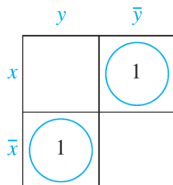
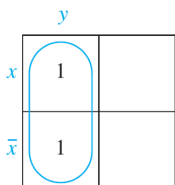
- Exemplo 7 Simplifique as somas de produtos das expressões Booleanas do exemplo anterior:

a)  $x y + \bar{x} y$

b)  $x \bar{y} + \bar{x} y$

c)  $x \bar{y} + \bar{x} y + \bar{x} \bar{y}$

**Solução.** Agrupamos os mintermos com o procedimento descrito anteriormente, obtendo os seguintes mapas de Karnaugh:



A partir dos mapas acima, podemos encontrar as fórmulas minimizadas:

a)  $y$

b)  $x \bar{y} + \bar{x} y$

c)  $\bar{x} + \bar{y}$



# Minimização de circuitos: Mapas de Karnaugh

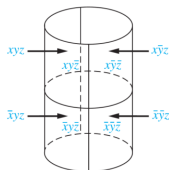
- O processo de simplificação de uma expressão em um mapa de Karnaugh de três variáveis é semelhante àquele usado para duas variáveis.
- Um mapa de Karnaugh de três variáveis  $x, y, z$  é um retângulo dividido em oito células, uma para cada mintermo possível:

- $x y z,$
- $x \bar{y} z,$
- $\bar{x} y z,$
- $\bar{x} \bar{y} z,$  e
- $x y \bar{z},$
- $x \bar{y} \bar{z},$
- $\bar{x} y \bar{z},$
- $\bar{x} \bar{y} \bar{z}.$

- Duas células são ditas **adjacentes** se os mintermos que eles representam diferem em exatamente um literal.

- Podemos formar um mapa de Karnaugh em três variáveis assim:

	$yz$	$y\bar{z}$	$\bar{y}z$	$\bar{y}\bar{z}$
$x$	$xyz$	$xy\bar{z}$	$\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{x}y\bar{z}$
$\bar{x}$	$\bar{x}yz$	$\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$



# Minimização de circuitos: Mapas de Karnaugh

- Blocos de duas células adjacentes (tamanho  $1 \times 2$  ou  $2 \times 1$ ) representam mintermos que podem ser combinados em um produto de dois literais.
- Blocos de tamanho  $2 \times 2$  e  $4 \times 1$  representam mintermos que podem ser combinados em um único literal.
- O bloco de todas as oito células representa um produto sem literais, ou seja, a função Booleana 1.

# Minimização de circuitos: Mapas de Karnaugh

- Exemplo 8 Exemplos de blocos de células adjacentes em um mapa de Karnaugh de 3 variáveis e suas expressões equivalentes minimizadas:

	$yz$	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
$x$				
$\bar{x}$				

$$x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z} = \bar{y}\bar{z}$$

	$yz$	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
$x$				
$\bar{x}$				

$$\bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z = \bar{x}z$$

# Minimização de circuitos: Mapas de Karnaugh

- Exemplo 8 (Continuação)

	$yz$	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
$x$				
$\bar{x}$				

$$xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z} = \bar{z}$$

	$yz$	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
$x$				
$\bar{x}$				

$$\bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z = \bar{x}$$

# Minimização de circuitos: Mapas de Karnaugh

- Exemplo 8 (Continuação)

	$yz$	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
$x$				
$\bar{x}$				

$$xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z = 1$$



# Minimização de circuitos: Mapas de Karnaugh

- O produto de literais que correspondem a um bloco só de 1s é chamado de **implicante** da função sendo minimizada.
- Um implicante é chamado de **implicante primo** se ele não estiver contido em um bloco maior de 1s representando o produto de menos literais.
- O objetivo é identificar os maiores blocos possíveis no mapa e cobrir todos os 1s com o menor número de blocos, usando os maiores blocos primeiro.
- Os maiores blocos possíveis sempre são escolhidos, mas devemos escolher um bloco sempre que ele for o único cobrindo um 1 no mapa de Karnaugh.

Tal bloco representa um **implicante primo essencial**.

- Ao cobrir todos os 1s no mapa com blocos correspondentes aos implicantes primos podemos expressar a soma dos produtos como um soma dos implicantes primos.

Note que pode haver mais de uma maneira de cobrir todos os 1s usando o menor número de blocos.

# Minimização de circuitos: Mapas de Karnaugh

- Exemplo 9 Vamos usar mapas de Karnaugh para minizar as seguintes expressões Booleanas de 3 variáveis.

a)  $x y \bar{z} + x \bar{y} \bar{z} + \bar{x} y z + \bar{x} \bar{y} \bar{z}$

	$yz$	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
$x$		1	1	
$\bar{x}$	1		1	

Expressão minimizada:

$$x \bar{z} + \bar{y} \bar{z} + \bar{x} y z$$

b)  $x \bar{y} z + x \bar{y} \bar{z} + \bar{x} y z + \bar{x} \bar{y} z + \bar{x} \bar{y} \bar{z}$

	$yz$	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
$x$			1	1
$\bar{x}$	1		1	1

Expressão minimizada:

$$\bar{y} + \bar{x} z$$

# Minimização de circuitos: Mapas de Karnaugh

- Exemplo 9 (Continuação)

c)  $x y z + x y \bar{z} + x \bar{y} z + x \bar{y} \bar{z} + \bar{x} y z + \bar{x} \bar{y} z + \bar{x} \bar{y} \bar{z}$

	$yz$	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
$x$	1	1	1	1
$\bar{x}$	1		1	1

Expressão minimizada:

$$x + \bar{y} + z$$

d)  $x y \bar{z} + x \bar{y} \bar{z} + \bar{x} \bar{y} z + \bar{x} \bar{y} \bar{z}$

	$yz$	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
$x$		1	1	
$\bar{x}$			1	1

Expressão minimizada:

$$x \bar{z} + \bar{x} \bar{y}$$

(Note que não precisamos incluir  $\bar{y}\bar{z}$  porque as células já estão cobertas por outros mintermos.)



# Minimização de circuitos: Mapas de Karnaugh

- Mapas de Karnaugh com 4 variáveis funcionam de forma análoga aos mapas com menos variáveis.
- A forma geral de um mapa de Karnaugh de 4 variáveis é a seguinte:

	$yz$	$y\bar{z}$	$\bar{y}z$	$\bar{y}\bar{z}$
$wx$	$wxyz$	$wxy\bar{z}$	$wx\bar{y}z$	$wx\bar{y}\bar{z}$
$w\bar{x}$	$w\bar{x}yz$	$w\bar{x}y\bar{z}$	$w\bar{x}\bar{y}z$	$w\bar{x}\bar{y}\bar{z}$
$\bar{w}x$	$\bar{w}xyz$	$\bar{w}xy\bar{z}$	$\bar{w}x\bar{y}z$	$\bar{w}x\bar{y}\bar{z}$
$\bar{w}\bar{x}$	$\bar{w}\bar{x}yz$	$\bar{w}\bar{x}y\bar{z}$	$\bar{w}\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{w}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$

# Minimização de circuitos: Mapas de Karnaugh

- Exemplo 10 Exemplos de blocos de células adjacentes em um mapa de Karnaugh de 4 variáveis e suas expressões equivalentes minimizadas:

	$yz$	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
$wx$				
$w\bar{x}$				
$\bar{w}\bar{x}$				
$\bar{w}x$				

$$w\bar{x}yz + w\bar{x}\bar{y}z = w\bar{x}z$$

	$yz$	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
$wx$				
$w\bar{x}$				
$\bar{w}\bar{x}$				
$\bar{w}x$				

$$\begin{aligned} &\bar{w}\bar{x}yz + \bar{w}\bar{x}y\bar{z} + \\ &+ \bar{w}\bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{w}\bar{x}\bar{y}z = \bar{w}\bar{x} \end{aligned}$$

# Minimização de circuitos: Mapas de Karnaugh

- Exemplo 10 (Continuação)

	$yz$	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
$wx$				
$w\bar{x}$				
$\bar{w}\bar{x}$				
$\bar{w}x$				

$$wx yz + wx \bar{y}z + \bar{w}x yz + \bar{w}x \bar{y}z = xz$$

	$yz$	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
$wx$				
$w\bar{x}$				
$\bar{w}\bar{x}$				
$\bar{w}x$				

$$wx y\bar{z} + wx \bar{y}\bar{z} + w\bar{x} y\bar{z} + w\bar{x} \bar{y}\bar{z} + \bar{w}\bar{x} y\bar{z} + \bar{w}\bar{x} \bar{y}\bar{z} + \bar{w}x y\bar{z} + \bar{w}x \bar{y}\bar{z} = \bar{z}$$



# Minimização de circuitos: Mapas de Karnaugh

- Exemplo 11 Vamos usar mapas de Karnaugh para minizar as seguintes expressões Booleanas de 3 variáveis.

a)  $wxyz + wxy\bar{z} + wx\bar{y}\bar{z} + w\bar{x}yz + w\bar{x}\bar{y}z + w\bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{w}x\bar{y}z + \bar{w}\bar{x}yz + \bar{w}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$

	$yz$	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
$wx$	1	1	1	
$w\bar{x}$	1		1	1
$\bar{w}\bar{x}$	1	1		
$\bar{w}x$				1

Expressão minimizada:

$$wyz + wx\bar{z} + w\bar{x}\bar{y} + \bar{w}\bar{x}y + \bar{w}x\bar{y}z$$

# Minimização de circuitos: Mapas de Karnaugh

- Exemplo 11 (Continuação)

b)  $w x \bar{y} \bar{z} + w \bar{x} y z + w \bar{x} y \bar{z} + w \bar{x} \bar{y} \bar{z} + \bar{w} x \bar{y} \bar{z} + \bar{w} \bar{x} y \bar{z} + \bar{w} \bar{x} \bar{y} \bar{z}$

	$yz$	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
$wx$			1	
$w\bar{x}$	1	1	1	
$\bar{w}\bar{x}$		1	1	
$\bar{w}x$			1	

Expressão minimizada:

$$\bar{y}\bar{z} + w\bar{x}y + \bar{x}\bar{z}$$

# Minimização de circuitos: Mapas de Karnaugh

- Exemplo 11 (Continuação)

c)  $wxy\bar{z} + wx\bar{y}\bar{z} + w\bar{x}yz + w\bar{x}y\bar{z} + w\bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{w}xyz + \bar{w}xy\bar{z} + \bar{w}x\bar{y}\bar{z} + \bar{w}x\bar{y}z + \bar{w}\bar{x}y\bar{z} + \bar{w}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$

	$yz$	$y\bar{z}$	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$
$wx$		1	1	
$w\bar{x}$	1	1	1	
$\bar{w}\bar{x}$		1	1	
$\bar{w}x$	1	1	1	1

Expressão minimizada:

$$\bar{z} + \bar{w}x + w\bar{x}y$$



# Minimização de circuitos: Método de Quine-McCluskey

- Como já discutimos, mapas de Karnaugh são úteis na minimização de circuitos com até seis variáveis, mas eles se tornem bastante complexos para cinco ou seis variáveis.
- Para minimizar circuitos com mais de 6 variáveis existe o **método Quine-McCluskey**, que foi inventado nos anos 60.
- Este método automatiza o processo de minimizar circuitos combinatórios e pode ser implementado como um programa de computador.

(Neste curso, entretanto, não vamos estudar o método de Quine-McCluskey: este conteúdo é coberto em curso de *hardware*.)