DCC638 - Introdução à Lógica Computacional
2026.1

Demonstrações: Dedução Natural

Área de Teoria DCC/UFMG

Dedução Natural

- Anteriormente vimos como utilizar *regras de inferências* para *deduzir* novas fórmulas a partir de outras.
- Demonstrações de uma conclusão a partir de premissas é feito com sucessivas deduções até que se deduza a conclusão esperada.
- Um conjunto de regras de inferência estabelece um *sistema dedutivo*.
- Apresentaremos agora o sistema dedutivo de *dedução natural* para Lógica Proposicional.
  - Introduzido nos anos 30 por S. Jáskowski e por G. Gentzen.
  - Comumente se representa demonstrações como *árvores de derivação*.
  - As folhas são as hipóteses e raiz a conclusão.
  - *Completo*: qualquer implicação válida pode ser justificada com ele.

Exemplo

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\psi_1)^1 \qquad (\psi_1 \to \psi_2)^2}{\psi_2}\to_E \qquad (\psi_2 \to (\psi_3 \wedge \psi_4))^3}{\psi_3 \wedge \psi_4}\to_E}{\psi_3}\wedge_{E_d}$$

- Conclui-se a fórmula ψ_3 a partir das hipóteses 1, 2 e 3.
- Todas as hipóteses são etiquetadas (algumas regras usarão essas etiquetas).

Regras (do exemplo anterior)

- Regra $\rightarrow_E$ (eliminação da implicação)

  Permite concluir ψ a partir de derivações de φ e de $\varphi \rightarrow \psi$.

  Note que esta regra corresponde ao raciocínio de *modus ponens*.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}_1\\ \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}\mathcal{D}_2\\ \varphi \rightarrow \psi\end{array}}{\psi} \rightarrow_E$$

  - $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$ correspondem às derivações que concluem φ e $\varphi \rightarrow \psi$, respectivamente.
  - Esta é uma regra binária, que toma duas premissas.

- Regra $\wedge_{E_d}$ (eliminação da conjunção à direita)

  Permite concluir φ_1 a partir de uma derivação de $\varphi_1 \wedge \varphi_2$.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D}\\ \varphi_1 \wedge \varphi_2\end{array}}{\varphi_1} \wedge_{E_d}$$

  - Esta é uma regra unária, que toma apenas uma premissa.

Mais regras

- Regra $\wedge_{E_e}$ (eliminação da conjunção à esquerda)

  Permite concluir φ_2 a partir de uma derivação de $\varphi_1 \wedge \varphi_2$.

$$\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}\\ \varphi_1 \wedge \varphi_2\end{matrix}}{\varphi_2}\ \wedge_{E_e}$$

Exemplo

- Esta é uma derivação de que a fórmula $(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \rightarrow \varphi_1$ é uma tautologia.
- A regra $\rightarrow_{I,1}$ é uma regra que *introduz* uma hipótese (com a etiqueta 1) e depois a *fecha*.
- A intuição é que uma vez que a hipótese introduzida cumpre seu papel, ela é eliminada e não pode ser usada em outras partes da demonstração.

$$\dfrac{\dfrac{(\varphi_1 \wedge \varphi_2)^1}{\varphi_1}\wedge_{E_d}}{(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \rightarrow \varphi_1}\rightarrow_{I,1}$$

- Regra $\rightarrow_{I,n}$ (introdução da implicação)

  Permite obter uma derivação para $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ dada uma derivação de φ_2 a partir de um conjunto de hipóteses contendo, eventualmente, φ_1.

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\varphi_1]^n \\ \mathcal{D} \\ \varphi_2\end{array}}{\varphi_1 \rightarrow \varphi_2}\rightarrow_{I,n}$$

Exemplo

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\psi_1)^1 \qquad (\psi_1 \to (\psi_2 \wedge \psi_3)^2}{\psi_2 \wedge \psi_3}\to_E}{\psi_2}\wedge_{E_d}}{\psi_1 \to \psi_2}\to_{I,1} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{(\psi_1)^1 \qquad (\psi_1 \to (\psi_2 \wedge \psi_3)^2}{\psi_2 \wedge \psi_3}\to_E}{\psi_3}\wedge_{E_e}}{\psi_1 \to \psi_3}\to_{I,1}}{(\psi_1 \to \psi_2) \wedge (\psi_1 \to \psi_3)}\wedge_I}{(\psi_1 \to (\psi_2 \wedge \psi_3)) \to ((\psi_1 \to \psi_2) \wedge (\psi_1 \to \psi_3))}\to_{I,2}$$

Exemplo

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{(\psi_1)^1 \qquad (\psi_1 \to (\psi_2 \wedge \psi_3)^2}{\psi_2 \wedge \psi_3}\,{\to_E}
    }{\psi_2}\,{\wedge_{E_d}}
  }{\psi_1 \to \psi_2}\,{\to_{I,1}}
  \qquad
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{(\psi_1)^1 \qquad (\psi_1 \to (\psi_2 \wedge \psi_3)^2}{\psi_2 \wedge \psi_3}\,{\to_E}
    }{\psi_3}\,{\wedge_{E_e}}
  }{\psi_1 \to \psi_3}\,{\to_{I,1}}
}{
  \dfrac{(\psi_1 \to \psi_2) \wedge (\psi_1 \to \psi_3)}{(\psi_1 \to (\psi_2 \wedge \psi_3)) \to ((\psi_1 \to \psi_2) \wedge (\psi_1 \to \psi_3))}\,{\to_{I,2}}
}\,{\wedge_I}
$$

- Regra $\wedge_I$ (introdução da conjunção)

  Dadas derivações para φ_1 e φ_2, podemos concluir $\varphi_1 \wedge \varphi_2$.

$$
\dfrac{\begin{matrix}\mathcal{D}_1 \\ \varphi_1\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\mathcal{D}_2 \\ \varphi_2\end{matrix}}{\varphi_1 \wedge \varphi_2}\,{\wedge_I}
$$

Exemplo

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\varphi)^1 \qquad (\varphi \to \psi_1)^2}{\psi_1}\to_E}{\psi_1 \vee \psi_2}\vee_{I_d}}{\varphi \to (\psi_1 \vee \psi_2)}\to_{I,1}}{(\varphi \to \psi_1) \to (\varphi \to (\psi_1 \vee \psi_2))}\to_{I,2}$$

Exemplo

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(\varphi)^1 \qquad (\varphi \to \psi_1)^2}{\psi_1} \to_E}{\psi_1 \vee \psi_2} \vee_{I_d}}{\varphi \to (\psi_1 \vee \psi_2)} \to_{I,1}}{(\varphi \to \psi_1) \to (\varphi \to (\psi_1 \vee \psi_2))} \to_{I,2}
$$

- Regras $\vee_{I_d}$ e $\vee_{I_e}$ (introdução da disjunção à direita/esquerda)

  Dada a derivação de uma fórmula φ, podemos concluir $\varphi \vee \psi$, para qualquer ψ. Analogamente, podemos concluir $\psi \vee \varphi$

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D} \\ \varphi\end{array}}{\varphi \vee \psi} \vee_{I_d}
$$

$$
\dfrac{\begin{array}{c}\mathcal{D} \\ \varphi\end{array}}{\psi \vee \varphi} \vee_{I_e}
$$

Exemplo

$$
\dfrac{((\psi_1 \wedge \psi_2) \vee (\psi_1 \wedge \psi_3))^1 \qquad \dfrac{(\psi_1 \wedge \psi_2)^2}{\psi_1} \wedge_{E_d} \qquad \dfrac{(\psi_1 \wedge \psi_3)^3}{\psi_1} \wedge_{E_d}}{\dfrac{\psi_1}{((\psi_1 \wedge \psi_2) \vee (\psi_1 \wedge \psi_3)) \to \psi_1} \to_{I,1}} \vee_{E,2,3}
$$

Exemplo

$$\dfrac{((\psi_1 \wedge \psi_2) \vee (\psi_1 \wedge \psi_3))^1 \qquad \dfrac{(\psi_1 \wedge \psi_2)^2}{\psi_1} \wedge_{E_d} \qquad \dfrac{(\psi_1 \wedge \psi_3)^3}{\psi_1} \wedge_{E_d}}{\dfrac{\psi_1}{((\psi_1 \wedge \psi_2) \vee (\psi_1 \wedge \psi_3)) \to \psi_1} \to_{I,1}} \vee_{E,2,3}$$

- Regra $\vee_{E,n_1,n_2}$ (eliminação da disjunção)

  Esta regra apresenta um raciocínio *por casos*. Para uma disjunção $\varphi_1 \vee \varphi_2$ ser verdadeira, um dos dois entre φ_1, φ_2 deve ser verdadeiro.
  Se tanto quanto φ_1 é verdadeiro como quando φ_2 é verdadeiro conseguimos derivar o mesmo ψ, então ψ é derivável de $\varphi_1 \vee \varphi_2$.

$$\dfrac{\begin{array}{c} \\ \mathcal{D}_1 \\ \varphi_1 \vee \varphi_2 \end{array} \qquad \begin{array}{c} [\varphi_1]^{n_1} \\ \mathcal{D}_2 \\ \psi \end{array} \qquad \begin{array}{c} [\varphi_2]^{n_2} \\ \mathcal{D}_3 \\ \psi \end{array}}{\psi} \vee_{E,n_1,n_2}$$

Outras regras

- Regra $\neg_E$ (eliminação da negação)

$$\frac{\varphi \qquad \neg\varphi}{\bot}\,\neg_E$$

- Regra $\neg_{I,n}$ (introdução da negação)

$$\begin{array}{c} [\varphi]^n \\ \mathcal{D} \\ \dfrac{\bot}{\neg\varphi}\,\neg_{I,n} \end{array}$$

- Regra $\bot_n$ (demonstração por redução ao absurdo)

$$\begin{array}{c} [\neg\varphi]^n \\ \mathcal{D} \\ \dfrac{\bot}{\varphi}\,\bot_n \end{array}$$